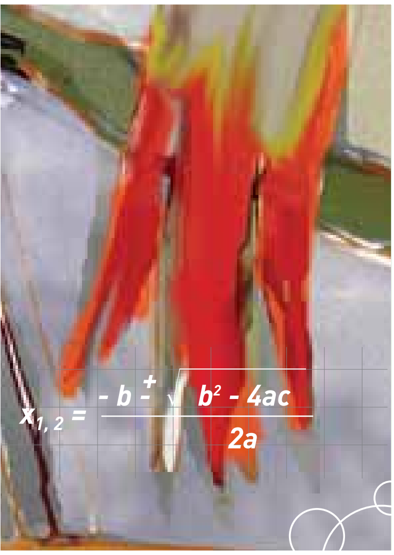


3

UNIDAD

Polinomios

En esta Unidad vamos a continuar el trabajo con expresiones algebraicas relacionándolas con algunos conceptos trabajados con anterioridad, como es el caso de las ecuaciones (trabajadas en Unidades anteriores) y las funciones (presentadas en otro Módulo). Es, por lo tanto, muy importante tener claros los conceptos aprendidos con anterioridad.

Si considera necesario relea el Módulo de Matemática-Funciones antes de comenzar a trabajar con el material que proponemos a continuación.

:| Para comenzar intente resolver los siguientes problemas y luego compare su resolución con la que nosotros le proponemos.

Problema 1

Matías es vendedor en una empresa que se dedica a la venta de electrodomésticos. Recibe mensualmente un sueldo fijo de $500 y además le pagan un 5% sobre el total de las ventas, en concepto de comisiones.

¿Cuál es la expresión que permite calcular el sueldo de Matías?

Problema 2

Susana debe confeccionar manteles rectangulares para las mesas de un comedor escolar. No tiene aún las medidas exactas pero sabe que en todas ellas el largo es igual al doble del ancho. Además calcula que, alrededor de cada mantel necesita 10 cm más de tela para el volado y el dobladillo. ¿Cuál es la expresión que permite calcular la cantidad de tela que necesita para cada mantel en función de la medida del largo de las mesas?

Problema 3

Una empresa fabrica piletas de lona. En cada pileta el largo es igual al doble del ancho y la altura tiene 50 cm menos que el ancho. ¿Cuál es la expresión que permite calcular el volumen de cada pileta en función del ancho?

:| Compare las expresiones que obtuvo con las que nosotros le proponemos.

Resolución del problema 1

Vemos que para calcular el sueldo correspondiente a un mes determinado, se deberán multiplicar las ventas por el porcentaje de comisión y luego sumarle el sueldo fijo. Para calcular el importe correspondiente a las comisiones se multiplican las ventas por 0,05 que resulta de multiplicar por 5 y dividir por 100. Como las ventas son variables (cambian de un mes a otro) las representamos con la letra x.

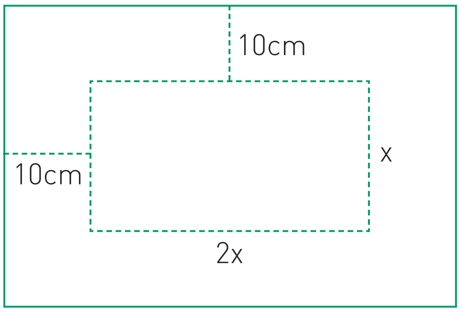
Nos queda, por lo tanto, la siguiente expresión:

$$S = 0,05\ x + 500$$

Donde x representa el importe de las ventas mensuales.

Resolución del problema 2

Hagamos un esquema para representar la situación:



Necesitamos calcular la cantidad de tela, o sea la superficie de los manteles.

Recordemos que la superficie de un rectángulo se calcula con la fórmula:

$$S = b \cdot h$$

Según los datos del gráfico anterior, la base es igual a **2x** más 20 cm que corresponden a los 10 cm que hay que dejar a cada lado para volados y dobladillo y la altura es igual a **x** más 20 cm, también para volados y dobladillo.

Remplazando estos datos en la fórmula de la superficie se obtiene la siguiente expresión:

$$S = (2x + 20) \cdot (x + 20)$$

Aplicando propiedad distributiva:

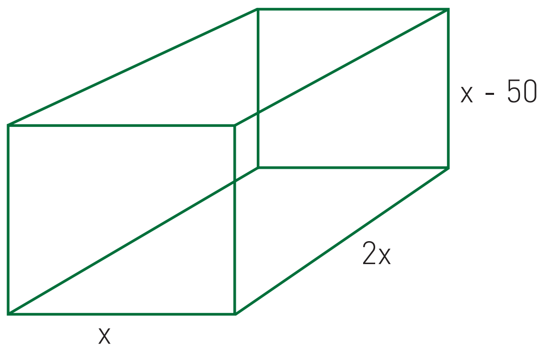
$$S = 2x^2 + 40\ x + 20\ x + 400$$

$$S = 2\ x^2 + 60\ x + 400$$

Siendo x el ancho de las mesas.

Resolución del problema 3

Hagamos un esquema para representar la situación.



Las piletas de lona son prismas rectos de base rectangular. Para calcular su volumen se deben multiplicar el ancho por el largo y por el alto. O sea:

V = ancho x largo x alto

Reemplazando los datos del gráfico anterior en la fórmula de volumen se obtiene la siguiente expresión:

$$V = x \cdot 2x \cdot (x - 50)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$V = 2x^3 - 100x^2$$

Veamos qué tienen en común todas las expresiones anteriores.

En todas ellas el segundo miembro es una expresión formada por términos donde aparece la variable elevada a un exponente natural y multiplicada por un cierto número. A veces también hay un término donde no aparece la variable y sólo está formado por un número. Los números por los que se multiplica la variable y el número solo reciben el nombre de coeficientes de la expresión.

Por ejemplo, en la expresión:

$$S = 0{,}05x + 500$$

El segundo miembro está formado por dos términos, $0{,}05x$ y 500.

En el primer término aparece la variable x elevada al exponente 1 y multiplicada por 0,05 y el segundo término está formado por un número solo, 500.

Decimos entonces que 0,05 y 500 son los coeficientes de esta expresión.

En forma general las expresiones de este tipo pueden escribirse:

$a_1 x + a_0$

Donde a_1 representa al coeficiente que multiplica a la variable que está elevada al exponente 1 y a_0 representa al número que aparece solo.

En la expresión:

$S = 2x^2 + 60 x + 400$

El segundo miembro está formado por tres términos, $2x^2$, $60x$ y 400.

En el primer término aparece la variable x elevada al cuadrado y multiplicada por 2, en el segundo término aparece la variable x elevada al exponente 1 y multiplicada por 60 y el tercer término está formado por un número solo, 400.

2, 60 y 400 son los coeficientes de esta expresión.

En forma general las expresiones de este tipo pueden escribirse:

$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Donde a_2 representa al coeficiente que multiplica a la variable elevada al cuadrado, a_2 representa al coeficiente que multiplica a la variable que está elevada al exponente 1 y a_0 representa al número que aparece solo.

En la expresión:

$V = 2x^3 – 100x^2$

El segundo miembro está formado por dos términos, $2x^3$ y $– 100 x^2$.

En el primer término aparece la variable x elevada al cubo y multiplicada por 2 y en el segundo término aparece la variable x elevada al cuadrado y multiplicada por –100.

2 y -100 son los coeficientes de esta expresión.

En forma general las expresiones de este tipo pueden escribirse:

$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Donde a_3 representa al coeficiente que multiplica a la variable elevada al cubo, a_2 representa al coeficiente que multiplica a la variable elevada al cuadrado, a_1 representa al coeficiente que multiplica a la variable que está elevada al exponente 1 y a_0 representa al número que aparece solo.

En nuestro ejemplo no aparece el término donde la variable esté elevada al exponente 1 ni tampoco aparece un número solo. Esto se debe a que los coeficientes a_1 y a_0 son iguales a cero. Es por eso que la expresión sólo tiene dos términos, aquel donde la variable aparece elevada al cubo y aquel donde aparece elevada al cuadrado.

En forma general, para una expresión donde la variable se encuentre elevada a un número **n** cualquiera, esto puede simbolizarse:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Donde **x** representa la variable, **n** representa el número al cual se eleva esa variable y **a** representa los coeficientes.

Este tipo de expresiones recibe el nombre de **polinomios** y las funciones cuya fórmula es un polinomio se llaman **funciones polinómicas**.

Veamos ahora algunos aspectos importantes a tener en cuenta pues le serán de utilidad para resolver los problemas y actividades que se proponen en el resto del Módulo. Tome nota en su carpeta, escriba sus propios ejemplos y si tiene alguna duda consulte a su tutor.

En estas expresiones:

- a_n ....a_0 **se llaman coeficientes** del polinomio y son números reales
- a_n **es el coeficiente principal**. El coeficiente principal es el que acompaña a la **x** que está elevada al mayor exponente (recuerde que si el exponente es 1 no se escribe) En nuestros ejemplos los coeficientes principales son 0,05; 2 y 2 respectivamente.
- a_0 **es el término independiente**. El término independiente es el que no aparece multiplicado por la variable. En nuestros ejemplos los términos independientes son 500, 400 y 0 respectivamente. Nótese que en el problema 3 el término independiente es cero pues no hay ningún término donde no aparezca la variable.
- **n es el grado del polinomio**. El grado corresponde al exponente más alto al que esté elevada la variable. En nuestros ejemplos los grados son 1, 2 y 3 respectivamente.
- Todas las potencias a las que se eleva la variable **x** son números naturales o cero. Por lo tanto el grado de un polinomio siempre es cero o un número natural.
- Si en un polinomio todos los coeficientes son ceros, el polinomio no tiene grado y se llama polinomio nulo.

ACTIVIDAD 37

:| Para cada uno de los polinomios que se indican a continuación señale: grado, coeficiente principal y término independiente.

a :| $P(x) = x^3 - 2x^5 + 4x - 2$

b :| $Q(x) = 3x^4 - 4x + 6x^2 + 3$

c :| $R(x) = 5x - 2$

d :| $T(x) = 3x^2$

e :| $M(x) = 5$

Verifique sus respuestas consultando la clave de corrección que figura al final del Módulo.

Veamos cómo podemos relacionar lo visto hasta ahora con lo trabajado en el Módulo de Matemática - Funciones.

Tomemos el caso de la expresión correspondiente al primer problema de esta Unidad:

$$S = 0{,}05\,x + 500$$

¿A qué tipo de función corresponde? ¿Por qué?

Vemos que se trata de una función lineal porque en su fórmula aparece la variable elevada a la potencia 1, multiplicada por un número (en este caso 0,05) más otro número solo, es decir, con la variable elevada a la potencia 0 (500). Recuerde que las funciones lineales tienen por fórmula expresiones del tipo:

Para afianzar estos conceptos puede releer en el Módulo de Matemática - Funciones el apartado correspondiente a funciones lineales.

$$f(x) = ax + b$$

Por otra parte, podemos ver que se trata de un polinomio de grado 1 pues el exponente más alto al que aparece elevada la variable es 1.

Podemos afirmar, entonces, que **las funciones lineales son funciones polinómicas de primer grado**.

Veamos que sucede en el caso del problema 2 cuya expresión es:

$$S = 2x^2 + 60x + 400$$

¿A qué tipo de función corresponde?

Podemos ver que esta expresión corresponde a la fórmula de una función cuadrática cuya fórmula general es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Puede encontrar una explicación más detallada en el Módulo de Matemática - Funciones, en el apartado correspondiente a funciones cuadráticas.

Además se trata de un polinomio de segundo grado pues el exponente más alto al que aparece elevada la variable es 2.

Podemos afirmar, entonces, que **las funciones cuadráticas son funciones polinómicas de segundo grado**.

En el caso del problema 3 cuya expresión es:

$$V = 2x^3 - 100x^2$$

Vemos que esta expresión corresponde a un polinomio de grado 3. Se dice que es **la expresión de una función polinómica de tercer grado**.

Problema 4

Se necesita vaciar una pileta que contiene 48.000 l de agua. Para ello dispone una bomba que desagota 6.000 l por hora.

:| Intente resolver el problema antes de proseguir con la lectura.

1 :| Escriba una expresión que le permita ir calculando el volumen de agua que queda en la pileta en función del tiempo de funcionamiento de la bomba.

2 :| Responda:

a :| ¿Cuánta agua quedará al cabo de 2 horas?

b :| ¿Y luego de 5 horas?

c :| ¿Cuánto tiempo se necesitará para vaciar la pileta?

3 :| Realice una gráfica.

:| Compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

1 :| La expresión que permite conocer el volumen que queda en la pileta luego de cierto tiempo es:

$$V(t) = 48.000 - 6000 \cdot t$$

Podemos observar que esta expresión corresponde a una **función polinómica de primer grado** donde el término independiente vale 48.000 y el coeficiente principal es 6.000.

2 :| a :| $V(2) = 48.000 - 6.000 \cdot 2 = 48.000 - 12.000 = 36.000$

b :| $V(5) = 48.000 - 6.000 \cdot 5 = 48.000 - 30.000 = 18.000$

c :| Cuando la pileta está vacía $V(t) = 0$, luego

$0 = 48.000 - 6.000 \cdot t$ despejando **t**

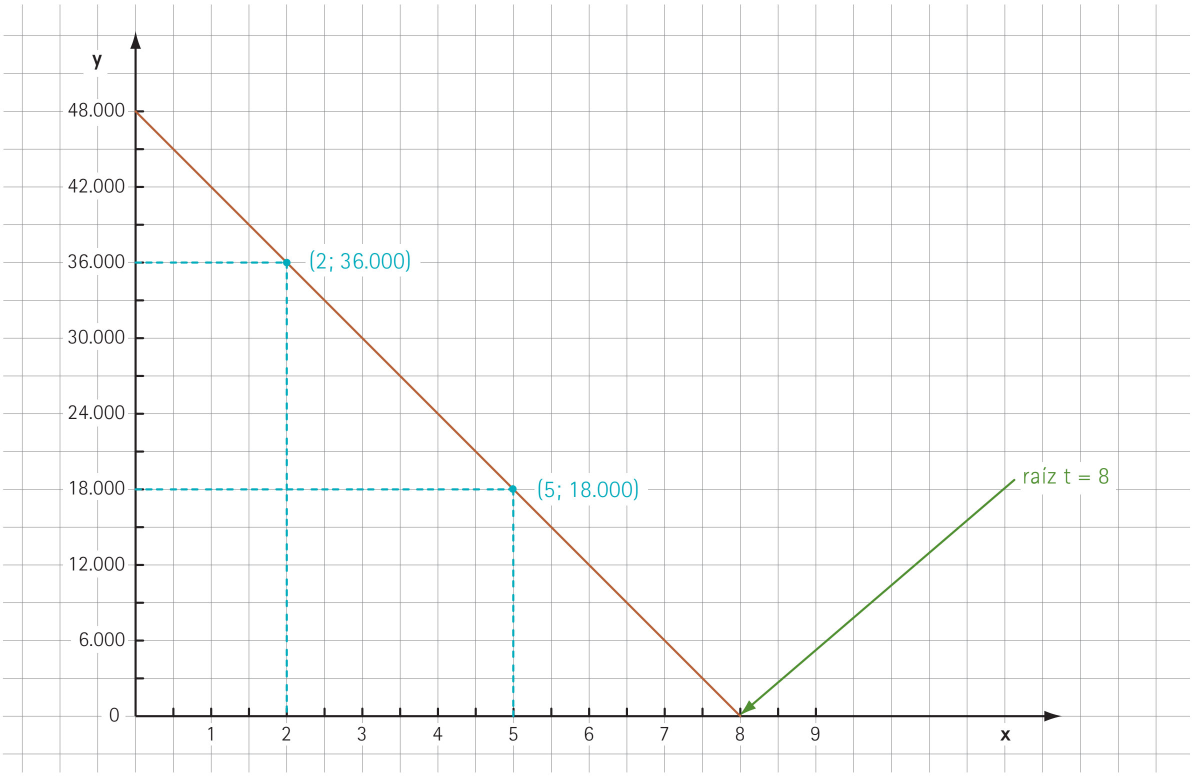
$6.000 \cdot t = 48.000$

$t = 48.000 : 6.000$

$t = 8$

Para vaciar la pileta se necesitan 8 horas.

3 | Si graficamos la función:



Como se dijo anteriormente, la expresión $V(t) = 48.000 - 6000 \cdot t$ que permite calcular el volumen de agua que queda en la pileta en función del tiempo corresponde a la fórmula de una función lineal cuyo segundo miembro es un polinomio de primer grado.

Para resolver los puntos **a** y **b** lo que se obtuvo fue el valor numérico de ese polinomio para $t = 2$ y $t = 5$.

Llamamos valor numérico de un polinomio al valor que se obtiene al reemplazar la variable por un número determinado.

En el caso **c** tuvimos que hallar el valor de **t** para el cual la función era igual a cero.

Hemos hallado el **cero** o **raíz** del polinomio.

Llamamos cero o raíz de un polinomio al valor de la variable para el cual el valor numérico del polinomio es cero.

Tome nota en su carpeta de estas definiciones. Son dos conceptos muy importantes.

Gráficamente, los ceros o raíces de una función son los puntos donde la gráfica corta al eje x. Para nuestro ejemplo $t = 8$ es la raíz. Para $t = 8$ el volumen es igual a cero. En $t = 8$ la gráfica corta al eje x.

En general:

*Si **f (x)** es una función polinómica y **f (a) = 0** decimos que **x = a** es un cero o raíz de **f (x)**.*

Las funciones polinómicas de primer grado, como la del problema anterior, tienen una sola raíz. Para hallarla, basta con igualar a cero la función y despejar la variable independiente.

Más adelante veremos cómo hallar las raíces de polinomios de grado mayor que 1.

ACTIVIDAD 38

:| Dados los siguientes polinomios hallar el valor numérico para $x = 2$ y $x = -1$.

a :| $P(x) = -3x^2 + 4x + 3$

b :| $Q(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$

c :| $R(x) = 5x - 4x^2 - 2$

ACTIVIDAD 39

:| Indicar, para cuál o cuáles de los polinomios siguientes $x = 3$ es una raíz.

a :| $P(x) = 2x^2 - 3x - 9$

b :| $Q(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x + 1$

c :| $R(x) = 5x - 15$

d :| $T(x) = 3x^3 - 3x$

Encontrará las respuestas en la Clave de corrección que figura al final del Módulo.

Operaciones con polinomios

Problema 5

Una empresa calcula el precio de venta y el costo de producción unitarios de un determinado artículo mediante las siguientes fórmulas:

$P(x) = 7 - 0{,}5x$ $\qquad\qquad$ $C(x) = 8 + 1{,}2x$

El ingreso es el producto de la cantidad de artículos vendidos por el precio unitario. La ganancia es la diferencia entre el ingreso y el costo.

:| Intente resolver el problema anterior.

1 :| Escriba una expresión que permita calcular el ingreso obtenido por la venta de **x** artículos.

2 :| Escriba una expresión que permita calcular la ganancia obtenida por la venta de **x** artículos.

:| Compare sus expresiones con las que proponemos a continuación.

Para calcular el ingreso **I (x)** debemos multiplicar el precio **P (x)** por la cantidad de artículos vendidos, **x**.

$I(x) = P(x) \cdot x$

Reemplazando **P(x)** por su expresión correspondiente:

$I(x) = (7 - 0{,}5x) \cdot x$

Aplicando propiedad distributiva obtenemos:

$\mathbf{I(x) = 7x - 0{,}5x^2}$ expresión que nos permite calcular el ingreso.

Hemos obtenido esta expresión multiplicando dos polinomios.

:| ¿Puede usted identificar cuáles? Anótelos en su carpeta e indique para cada uno de ellos cuál es su grado, su coeficiente principal y su término independiente. Si tiene alguna dificultad consulte con su tutor.

Para calcular la ganancia debemos restar el costo a los ingresos

$G(x) = I(x) - C(x)$

Reemplazando el costo y los ingresos por sus respectivas expresiones obtenemos:

$G(x) = 7x - 0{,}5x^2 - (8 + 1{,}2x)$

Eliminando el paréntesis:

$G(x) = 7x - 0{,}5x^2 - 8 - 1{,}2x$

Agrupando obtenemos:

$G(x) = 5{,}8x - 0{,}5x^2 - 8$ expresión que nos permite calcular la ganancia.

Hemos obtenido esta expresión restando dos polinomios.

:| ¿Puede usted identificar cuáles? Anótelos en su carpeta e indique para cada uno de ellos cuál es su grado, su coeficiente principal y su término independiente. Si tiene alguna dificultad consulte con su tutor.

ACTIVIDAD 40

Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2$

$Q(x) = 5x^2 + 3x - 1$

$M(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 4$

a :| Obtenga:

1 :| $R(x) = P(x) + Q(x)$

2 :| $S(x) = P(x) - Q(x)$

3 :| $N(x) = P(x) + M(x)$

4 :| $T(x) = P(x) \cdot Q(x)$

b :| Indique el grado de cada uno de los polinomios anteriores.

c :| Compare el grado de los polinomios dados con el grado de los polinomios obtenidos.

d :| Intente enunciar una conclusión antes de proseguir con la lectura y cópiela en su carpeta.

Conclusiones

1. Si sumamos o restamos dos polinomios de distinto grado, el grado del polinomio obtenido coincide con el grado del polinomio de mayor grado.

2. Si ambos tienen el mismo grado, el grado del polinomio obtenido dependerá del resultado de la operación entre los coeficientes principales de dichos polinomios.

a. Si la suma o resta de los coeficientes principales es cero, se obtendrá un polinomio de grado menor que el grado de los polinomios dados.

b. Si la suma o resta de los coeficientes principales es distinta de cero, se obtendrá un polinomio de igual grado que los polinomios dados.

3. Si multiplicamos dos polinomios el grado del polinomio obtenido será igual a la suma de los grados de los polinomios dados.

Problema 6

Se sabe que la expresión que permite conocer el volumen de un prisma recto de base rectangular es $V(x) = 6x^3 + 19x^2 + 15x$ siendo x la medida de una de sus aristas. Si otra de las aristas es igual a $3x + 5$, hallar la expresión que permite calcular la medida de la tercera arista. Recordar que el volumen de un prisma recto de base rectangular se calcula multiplicando las tres aristas.

:| Intente resolver el problema antes de proseguir con la lectura.

:| Compare su resolución con las que le proponemos a continuación:

$V(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)$ siendo A, B y C las expresiones de cada una de las aristas.

Reemplazando el volumen y dos de las aristas por sus expresiones correspondientes se obtiene:

$$V(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)$$

$6x^3 + 19x^2 + 15x = x \cdot (3x + 5) \cdot C(x)$ multipliquemos $A(x) \cdot B(x)$

$6x^3 + 19x^2 + 15x = (3x^2 + 5x) \cdot C(x)$ (*)

Debemos encontrar $C(x)$ o sea un polinomio que multiplicado por $3x^2 + 5x$ de por resultado $6x^3 + 19x^2 + 15x$.

Para ello podemos proceder de la siguiente forma:

Calculemos primero cuál debe ser el grado de $C(x)$.

Para ello debemos tener en cuenta que cuando se multiplican dos polinomios, en este caso $C(x)$ y $3x^2 + 5x$, el grado del polinomio obtenido será igual a la suma de los grados de esos polinomios que se multiplicaron.

Veamos que sucede en nuestro caso.

El grado de $V(x)$ es 3, por lo tanto, la suma de los grados de $C(x)$ y $3x^2 + 5x$ debe ser 3.

Y como el grado de $3x^2 + 5x$ es 2, entonces el grado de $C(x)$ debe ser 1.

Hemos avanzado un poco. Todavía no conocemos la expresión de $C(x)$ pero ya sabemos que tiene que ser un polinomio de primer grado.

Escribamos, entonces, la expresión general de un polinomio de primer grado. Para ello recordemos que las funciones lineales son funciones polinómicas de primer grado y tienen por fórmula $f(x) = ax + b$.

Por lo tanto podemos escribir $C(x) = ax + b$ y reemplazar esta expresión en (*)

$$6x^3 + 19x^2 + 15x = (3x^2 + 5x)(ax + b)$$

Aplicando la propiedad distributiva se obtiene:

$$6x^3 + 19x^2 + 15x = 3ax^3 + 3bx^2 + 5ax^2 + 5bx$$

Agrupando los términos semejantes obtenemos:

$$6x^3 + 19x^2 + 15\,x = 3ax^3 + (3b + 5a)\,x^2 + 5bx$$

Nos ha quedado una igualdad entre dos polinomios. Para que estos dos polinomios sean iguales todos los coeficientes de los términos semejantes deben ser iguales. Por lo tanto se deben cumplir simultáneamente las siguientes condiciones:

$6 = 3a$ porque 6 y $3a$ son los coeficientes de los términos cuya parte literal es x^3.

$19 = 3b + 5a$ porque 19 y $3b + 5a$ son los coeficientes de los términos cuya parte literal es x^2.

$15 = 5b$ porque 15 y $5b$ son los coeficientes cuya parte literal es x.

Despejando se obtiene:

$a = 2 \qquad\qquad b = 3$

Reemplazando estos valores en la expresión de $C(x)$ se obtiene:

$$C(x) = 2x + 3$$

Ahora vamos a proponerle otra forma de resolución.

Volvamos a considerar la expresión (*):

$$6x^3 + 19x^2 + 15x = (3x^2 + 5x) \cdot C(x)$$

Podemos obtener $C(x)$ realizando la siguiente división:

$$(6x^3 + 19x^2 + 15x) : (3x^2 + 5x) = C(x)$$

Necesitamos disponer de un método para dividir polinomios. Antes de proseguir recordemos qué sucede con la división de números enteros.

Para ello le pedimos que realice las siguientes divisiones sin usar calculadora y sin utilizar números decimales. Escriba la cuenta en su carpeta.

$300 : 12 =$ y $659 : 21 =$

> Si no recuerda el método para dividir números puede consultar el Libro 1, página 156. Si no lo tiene puede solicitárselo a su tutor.

Recordemos que dividir un número entero a, por otro número entero b significa encontrar un número entero c tal que $b \cdot c = a$. Si ese número entero existe decimos que se trata de una división exacta. Por ejemplo si $a = 300$ y $b = 12$ entonces $c = 25$ porque $12 \cdot 25 = 300$

Cuando ese número c no existe decimos que la división no es exacta y al dividir los dos números se obtiene un cociente y un resto. Por ejemplo si $a = 659$ y $b = 21$, el cociente es 31 y el resto es 8.

Podemos escribir: $659 = 21 \cdot 31 + 8$.

Es decir, si se dividen dos números enteros a y b con $b \neq 0$, existen siempre dos números c y r tales que:

$$a = b \cdot c + r \text{ con } 0 \leq r < b$$

En el caso de nuestros ejemplos

$300 = 12 \cdot 25 + 0$ con $0 < 12$

$659 = 21 \cdot 31 + 8$ con $0 < 8 < 21$

El mecanismo para dividir polinomios es similar al mecanismo para dividir números. Recordemos primero la división de números:

$$\begin{array}{rl|l} & 659 & 21 \\ \cline{3-3} - & 63 & 31 \\ \cline{2-2} - & 29 & \\ & 21 & \\ \cline{2-2} & 8 & \end{array}$$

1 | dividimos 6 : 2 y obtenemos 3,

2 | multiplicamos 3 por 21 y obtenemos 63,

3 | restamos 65 – 63 y obtenemos 2,

4 | bajamos el 9 y repetimos los pasos anteriores hasta que el resto sea menor que el divisor.

Apliquemos este mecanismo a los polinomios:

$$\begin{array}{rl|l} & 6x^3 + 19x^2 + 15x & 3x^2 + 5x \\ \cline{3-3} - & 6x^3 + 10x^2 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} & \quad 9x^2 + 15x & \\ - & \quad 9x^2 + 15x & \\ \cline{2-2} & \qquad 0 & \end{array}$$

1 | dividimos $6x^3$ por $3x^2$ y obtenemos $2x$,

2 | multiplicamos $2x$ por $3x^2 + 5x$ y obtenemos $6x^3 + 10x^2$,

3 | restamos del dividendo el resultado del paso anterior y obtenemos $9x^2$,

4 | bajamos $15x$ y repetimos los pasos anteriores hasta que el grado del polinomio resto sea menor que el grado del polinomio divisor o el resto sea 0.

A continuación utilice este mecanismo para realizar la siguiente Actividad.

ACTIVIDAD 41

:| Dados los siguientes polinomios: $A(x) = 3x^3 – 2x^2 + x – 1$, $B(x) = x^2 - 4x + 2$ y $C(x) = 3x – 5$, realice las siguientes operaciones:

a :| $A(x) : B(x) =$

b :| $A(x) : C(x) =$

:| ¿Qué conclusión puede sacar comparando el grado del polinomio resto con el grado del polinomio divisor?

SÍNTESIS

- Al dividir dos polinomios de A (x) y B (x) existirán dos polinomios C (x) y R (x) tales que A (x) = B (x) · C (x) + R (x) y donde el grado de R (x) será menor que el grado de B (x) o R (x) = 0
- Cuando R (x) = 0 decimos que A (x) **es divisible por** B (x) o que B (x) **es divisor de** A (x).

Veamos ahora un caso especial de división.

Supongamos que $A(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5$ y $B(x) = x - 2$

Hagamos la división A (x) : B (x) siguiendo los pasos indicados en la página anterior:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 + 4x^2 - 6x + 5 & x - 2 \\
\cline{2-2}
-\underline{2x^3 - 4x^2} & 2x^2 + 8x + 10 = C(x) \text{ cociente} \\
\qquad 8x^2 - 6x & \\
\quad - \underline{8x^2 - 16x} & \\
\qquad\qquad 10x + 5 & \\
\qquad\quad - \underline{10x - 20} & \\
\qquad\qquad\qquad 25 = R(x) \text{ resto} &
\end{array}
$$

Hemos obtenido: $C(x) = 2x^2 + 8x + 10$ y $R(x) = 25$

En muchas ocasiones será necesario dividir un polinomio cualquiera por otro de la forma **x – a**. Existe una forma más sencilla para dividir polinomios en los casos en los que el divisor sea de la forma **x – a** cuya creación se le atribuye a un matemático italiano llamado Paolo Ruffini.

Veamos cómo aplicar este procedimiento para realizar la división anterior. En este caso queremos dividir $A(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5$ por $B(x) = x - 2$ donde A (x) es un polinomio cualquiera y B (x) es de la forma **x – a** siendo **a = 2**.

Consiste en trabajar sólo con los valores que aparecen en color en la división anterior.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 2 & 4 & -6 & 5 & \text{Coeficientes de A (x)} \\
 & & + & + & + & \\
a = 2 & & 4 & 16 & 20 & \\
\hline
 & 2 & 8 & 10 & 25 &
\end{array}
$$

1 | Ubicamos los coeficientes de A (x): 2, 4, -6 y 5.

2 | Bajamos el primer coeficiente, 2.

3 | Multiplicamos el primer coeficiente por **a** que en este caso vale 2, 2. 2 = 4, lo colocamos bajo el segundo coeficiente, 4 y sumamos 4 + 4 = 8.

4 | Repetimos el paso anterior con los siguientes coeficientes hasta terminar. El último número obtenido es el resto, en este caso 25. Los números anteriores, en este caso 2, 8 y 10 son los coeficientes del polinomio cociente, que tendrá un grado menos que el grado del polinomio que hemos dividido. En este caso como el grado de A (x) era 3, el grado de C (x) será 2. Por lo tanto $C(x) = 2x^2 + 8x + 10$.

Calculemos ahora el valor numérico de A (x) para $x = 2$:

$$A(x) = (2x^3 + 4x^2 - 6x + 5)$$

$$A(2) = (2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 5)$$

$$A(2) = 25$$

Vemos que, en este caso, el valor numérico del polinomio A (x) para $x = 2$ coincide con el resto de dividir A (x) por $x - 2$.

Realice usted la siguiente Actividad.

ACTIVIDAD 42

a :| Divida $P(x) = x^2 + 4x - 1$ por $x - 1$ utilizando la regla de Ruffini y luego calcule el valor numérico de P (x) para $x = 1$.

b :| Divida $Q(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x - 6$ por $x + 3$ utilizando la regla de Ruffini y luego halle el valor numérico de Q (x) para $x = -3$.

c :| Compare los restos de las divisiones realizadas con los respectivos valores numéricos de los polinomios que se dividieron. ¿Qué observa? Anote sus conclusiones.

¿Sucederá siempre que el valor numérico de un polinomio en x = a coincide con el resto de dividir ese polinomio por $x - a$?

Ya hemos visto en la primera Unidad de este Módulo que para poder asegurar que una propiedad se cumple siempre no basta con comprobarla para algunos casos particulares sino que debemos verificarla en forma genérica.

Supongamos que $B(x) = x - a$ y A (x) es un polinomio cualquiera.

Si dividimos A (x) por B (x) obtendremos C (x) y R (x) tales que:

$$A(x) = B(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Donde el grado de R (x) debe ser menor que el grado de B (x). Dado que el grado de B (x) es 1, el grado de R (x) será 0 o R (x) = 0, por lo tanto R (x) será un número real.

Reemplazando:

$$A(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$$

Cuando $x = a$

$$A(a) = (a - a) \cdot C(a) + R$$

$$A(a) = 0 + R$$

$$A(a) = R$$

Ahora sí podemos asegurar que:

El resto de dividir un polinomio A (x) cualquiera por otro de la forma coincide con el valor numérico del polinomio para $x = a$. Esta propiedad es conocida como **Teorema del Resto.**

Además, ya vimos que, si para un determinado valor de x, el valor numérico del polinomio era igual a cero, ese valor era un cero o raíz del polinomio.

O sea, si $A(a) = 0$, entonces a es una raíz o cero del polinomio A (x).

Por otra parte, $A(a) = R$ (por el Teorema del Resto).

Entonces podemos afirmar que:

Cualquier polinomio A (x) será divisible por $x - a$ (el resto de la división es cero) si y sólo si a es una raíz de A (x).

ACTIVIDAD 43

:| Utilice el Teorema del Resto para encontrar el resto de dividir $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ por $Q(x) = x + 4$ y por $S(x) = x - 2$, sin hacer la división.

ACTIVIDAD 44

:| Encuentre en cada caso el valor de m para que el polinomio P (x) sea divisible por Q (x), siendo:

a :| $P(x) = x^2 + 2x + 4x^3 - m$ y $Q(x) = x - 1$

b :| $P(x) = 4x^3 - 2x + 3m$ y $Q(x) = x + 3$

ACTIVIDAD 45

:| Indique si $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ es divisible por cada uno de los polinomios que se indican a continuación:

a :| $Q(x) = x + 1$

b :| $R(x) = x - 3$

c :| $T(x) = x - 1$

d :| $M(x) = x + 2$

ACTIVIDAD 46

:| Señale cuáles de los siguientes valores de x corresponden a raíces del polinomio: $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$.

X = 1 x = 2 x = 3 x = 4 x = -1 x = -2 x = - 3

Funciones polinómicas

En el Módulo de Matemática-Funciones usted ya ha trabajado con algunas funciones polinómicas. Por ejemplo con funciones lineales que son funciones polinómicas de primer grado y con funciones cuadráticas que son funciones lineales de segundo grado. En este Módulo vamos a profundizar el trabajo con funciones cuadráticas. Le aconsejamos releer lo trabajado sobre funciones cuadráticas en el módulo de funciones antes de proseguir con la lectura.

Funciones polinómicas de segundo grado: funciones cuadráticas

Problema 7

Se patea una pelota, desde el suelo hacia arriba. La altura que alcanza medida desde el suelo en función del tiempo está dada por la siguiente fórmula:

$h(t) = -2t^2 + 6t + 8$, donde h representa la altura, medida en metros y t el tiempo, medido en segundos.

1 :| ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

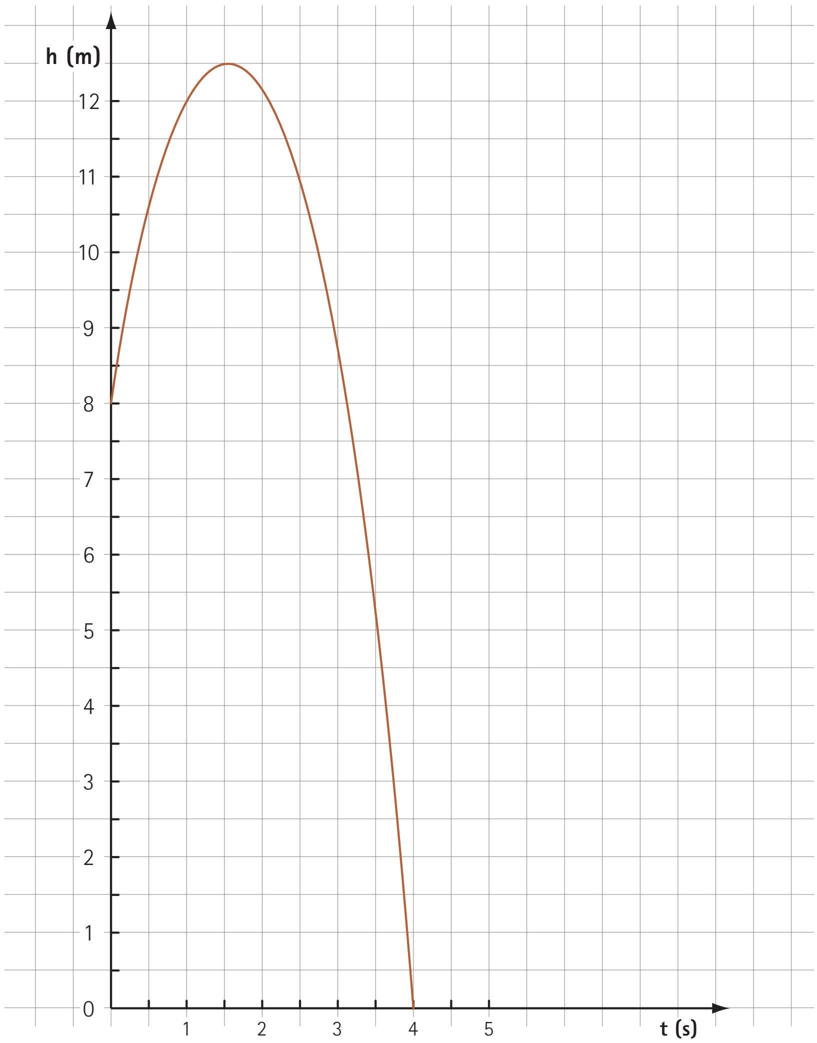
2 :| ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

3 :| Realice un gráfico de la función.

Sugerencia: Como en este problema la función viene dada por su fórmula, una forma de resolverlo es realizar primero la gráfica y a continuación responder las otras preguntas sacando la información del gráfico. Primero podríamos armar una tabla y con esos valores construir la gráfica.

Tiempo	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Altura	8	10,5	12	12,5	12	10,5	8	4,5	0

:| Intente resolver este problema y luego compare su resolución con la que le proponemos a continuación.



Para responder el **punto 1** debemos tener en cuenta que en el momento en que la pelota llega al suelo su altura es cero. Esto corresponde a los puntos donde la gráfica corta al eje x. Observando la gráfica vemos que esto se verifica para $t = 4$.

Observando el gráfico también podemos responder al **punto 2** pues la máxima altura corresponde a $h = 12{,}5$.

Pero también podemos trabajar algebraicamente. Veamos cómo.

En primer lugar recordemos que las funciones cuadráticas tienen por fórmula general:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Si comparamos con la fórmula del problema observamos que esta corresponde a una función cuadrática en la cual $a = -2$, $b = 6$ y $c = 8$.

Si queremos saber cuánto tarda en llegar al suelo (**punto 1**) debemos calcular el momento en que la altura es cero. O sea, calcular los valores de t para los cuales h es cero. Esto significa hallar los ceros o raíces de la función.

Si queremos hallar la altura máxima (**punto 2**) debemos encontrar la coordenada y del vértice.

Veamos cómo resolver el **punto 1**.

Hallar las raíces de esta función significa resolver la siguiente ecuación:

$$0 = -2t^2 + 6t + 8$$

Como aún no disponemos de una forma para despejar t directamente, deberemos encontrar una expresión equivalente a la dada de la cual podamos despejar t.

Recordemos que $-2t^2 + 6t + 8$ será divisible por un polinomio de la forma $t - a$ si a es una raíz del polinomio.

Entonces podemos escribir:

$$(-2t^2 + 6t + 8) : (t - a) = C(t)$$

Despejando nos queda:

$$(-2t^2 + 6t + 8) = (t - a) \cdot C(t) \quad (*)$$

Con lo cual $-2t^2 + 6t + 8$ nos queda descompuesto en el producto de dos polinomios, uno de ellos de la forma $t - a$ siendo a una raíz del polinomio.

Ahora debemos encontrar el valor de a y la expresión correspondiente a $C(t)$.

Como a es una raíz del polinomio, teniendo en cuenta el Teorema del Resto, el valor numérico de ese polinomio para $t = a$ debe ser cero.

Busquemos algún valor de **t** para el cual $- 2t^2 + 6t + 8$ sea cero. Para esto procedamos por tanteo. Le vamos dando distintos valores a **t** hasta encontrar uno para el cual la cuenta dé cero.

Por ejemplo:

Si $t = 1$ $\quad h(1) = -2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 8 = 12$

Si $t = 2$ $\quad h(2) = -2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 8 = 12$

Si $t = - 1$ $\quad h(-1) = -2 \cdot -1)^2 + 6 \cdot (- 1) + 8 = 0$

Vemos que para $t = - 1$ el valor numérico de $h(t)$ es cero, por lo tanto $t = - 1$ es una raíz de ese polinomio. Hemos encontrado el valor de **a** que buscábamos.

Reemplacemos ese valor de **a** en la expresión (*).

$$(- 2t^2 + 6t + 8) = (t - (- 1)) \cdot C(t)$$

$$(- 2t^2 + 6t + 8) = (t + 1) \cdot C(t)$$

Ahora debemos encontrar la expresión correspondiente a **C (t)**. Para ello debemos resolver la siguiente división:

$$(- 2t^2 + 6t + 8) : (t + 1) = C(t)$$

Hagamos la división :

$$\begin{array}{rl|l}
 & - 2t^2 + 6t + 8 & t + 1 \\ \cline{3-3}
- & - 2t^2 - 2t & - 2t + 8 = C(t) \text{ cociente} \\ \cline{2-2}
 & 8t + 8 & \\
- & 8t + 8 & \\ \cline{2-2}
 & 0 = R(t) \text{ Resto} &
\end{array}$$

Por último reemplacemos **C (t)** por la expresión hallada:

$$(- 2t^2 + 6t + 8) = (t + 1) \cdot (- 2t + 8)$$

Volvamos ahora a la ecuación que queríamos resolver.

$$0 = (- 2t^2 + 6t + 8)$$

Reemplazando nos queda:

$$0 = (t + 1) \cdot (- 2t + 8)$$

Sacando -2 de factor común del segundo paréntesis se obtiene:

$$0 = - 2 (t + 1) (t - 4)$$

Hemos obtenido una expresión de la cual podemos despejar **t**.

Como $-2 \cdot (t + 1 \cdot (t - 4)$ es el producto de tres factores, este producto será igual a cero si alguno de esos tres factores es cero. (Recuerde que cualquier número multiplicado por cero es igual a cero).

-2 es distinto de cero, por lo tanto deberá cumplirse que:

$t + 1 = 0$ o $t - 4 = 0$.

Despejando **t** de cada una de las expresiones anteriores obtenemos, respectivamente $t = -1$ y $t = 4$ que son las soluciones de la ecuación.

Ahora, volviendo a nuestro problema, debemos interpretar los dos resultados obtenidos al resolver la ecuación.

Por el contexto del problema, el valor negativo carece de sentido. Por lo tanto, **la pelota tardará 4 segundos en llegar al suelo**.

En el problema anterior hemos pasado de la expresión:

$h(t) = -2t^2 + 6t + 8$

A otra equivalente:

$h(t) = -2(t + 1)(t - 4)$

La primera expresión corresponde a la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ llamada **expresión general** de la función cuadrática. La segunda corresponde a la forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ llamada **expresión factorizada** de la función donde x_1 y x_2 son las raíces de la función y **a** es el coeficiente principal del polinomio.

Existe otra forma de hallar las raíces de un polinomio de segundo grado, que consiste en la aplicación de una fórmula.

A continuación vamos a desarrollar el proceso por el cual se llega a esta fórmula.

Pero tenga en cuenta que no será necesario que usted recuerde todo el proceso. Para la resolución de los problemas bastará con que recuerde la fórmula y la aplique.

Si le resulta muy complicado seguir este desarrollo, consulte con su tutor.

Sea la expresión general $f(x) = ax^2 + bx + c$ vamos a escribirla de otra forma tal que pueda despejarse **x**:

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

Sacamos **a** de factor común:

$a(x^2 + b/ax + c/a) = 0$

dividimos ambos miembros por **a**:

$x^2 + b/a\,x + c/a = 0$

Si multiplicamos y dividimos un término por un mismo número el resultado no cambia. En este caso dividimos y multiplicamos el segundo término por 2.

$x^2 + 2 \cdot (b/2a)x + c/a = 0$

Y si sumamos y restamos un mismo término a uno de los miembros de una igualdad, esta se mantiene. En este caso sumamos y restamos $(b/2a)^2$.

$$x^2 + 2 \cdot (b/2a)x + (b/2a)^2 - (b/2a)^2 + c/a = 0$$

Los tres primeros términos corresponden al desarrollo del cuadrado de un binomio. Los reemplazamos, entonces, por su expresión equivalente:

$$(x + b/2a)^2 - (b/2a)^2 + c/a = 0$$

Ahora podemos despejar **x**:

$$(x + b/2a)^2 = (b/2a)^2 - c/a$$

Distribuimos el cuadrado que aparece en el segundo miembro:

$$(x + b/2a)^2 = b^2/4a^2 - c/a$$

Sacamos común denominador $4a^2$ en el segundo miembro.

$$(x + b/2a)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$(x + b/2a) = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Obtenemos dos valores de **x**, uno utilizando el valor positivo de la raíz cuadrada y otro utilizando el valor negativo:

$$x_1 = + \sqrt{\frac{+ b^2 - 4ac}{4a^2}} - b/2a \qquad x_1 = \frac{- b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = - \sqrt{\frac{- b^2 - 4ac}{4a^2}} - b/2a \qquad x_2 = \frac{- b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hemos hallado una fórmula a partir de la cual encontrar los valores de las raíces conociendo los coeficientes de la forma general de la función cuadrática.

Ahora veamos cómo aplicar estas fórmulas para resolver nuestro problema.

Recordemos que la expresión que permite calcular la altura en función del tiempo es: $h(t) = - 2t^2 + 6t + 8$, donde $a = - 2$, $b = 6$ y $c = 8$.

Reemplacemos estos valores en la fórmula correspondiente:

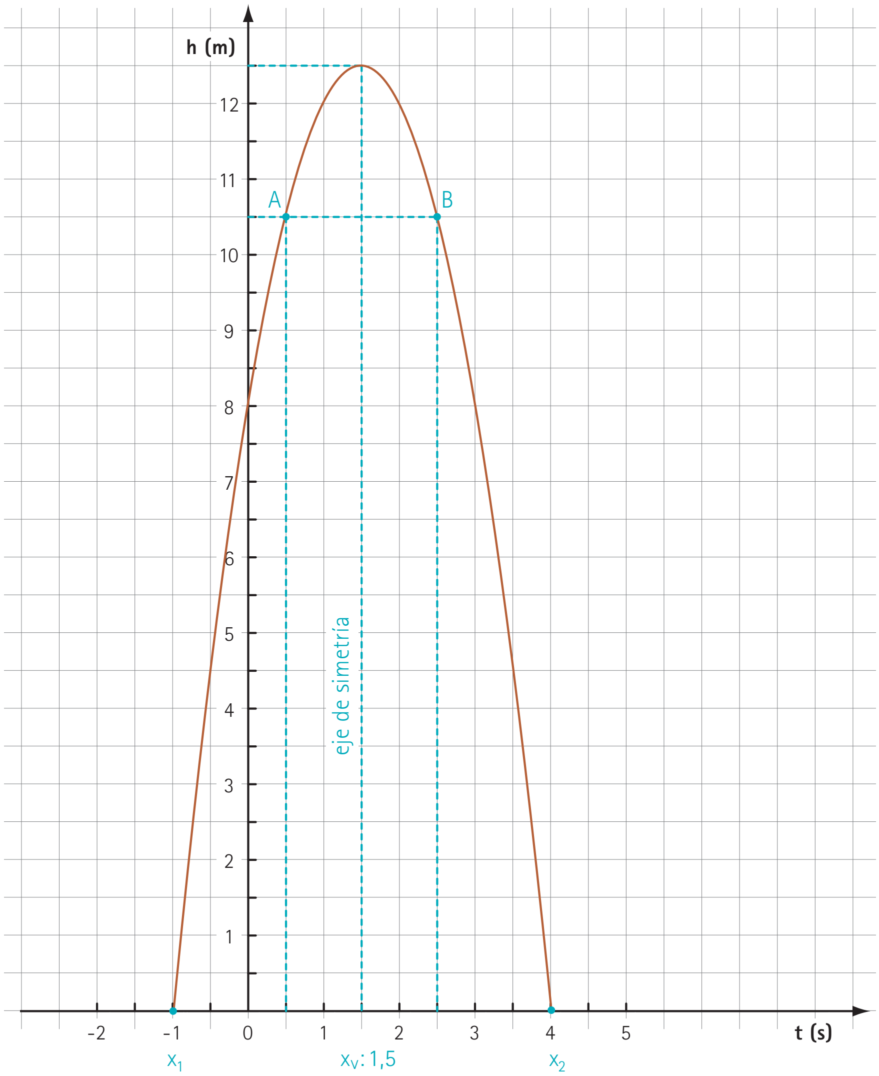
$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-6 + \sqrt{36 + 64}}{-4} = \frac{-6 + \sqrt{100}}{-4} = \frac{-6 + 10}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-6 - \sqrt{36 + 64}}{-4} = \frac{-6 - \sqrt{100}}{-4} = \frac{-6 - 10}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4$$

Hemos obtenido dos raíces: $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$.

Veamos cómo resolver el punto **2**, o sea hallar la altura máxima alcanzada.

Para calcular la altura máxima alcanzada debemos hallar la coordenada y del vértice de la parábola, que llamaremos y_v. Hay distintas formas de encontrar las coordenadas del vértice de una parábola. Una de ellas consiste en trabajar con dos puntos simétricos cualesquiera. Esta forma ya fue trabajada en el Módulo de Matemática - Funciones. Puede usted releerlo en el apartado correspondiente a funciones cuadráticas. También podríamos utilizar las raíces calculadas en el punto anterior para calcular la coordenada x del vértice, que llamaremos x_v, pues las raíces son puntos simétricos. Recordemos que los puntos simétricos son aquellos que tienen distinta coordenada x pero la misma coordenada y. Gráficamente son puntos que están a la misma altura, uno a cada lado del eje de simetría de la parábola y a la misma distancia de ese eje.



En ese caso basta con sumar las raíces x_1 y x_2 y dividir ese resultado por dos:

$$x_v = (x_1 + x_2) : 2$$

Utilizando los datos de nuestro problema obtendríamos:

$$x_v = (-1 + 4) : 2 = 3 : 2 = 1,5$$

Para hallar y_v se calcula $h\ (x_v)$ o sea el valor numérico de $h\ (t)$ para $t = x_v$.

Para ello se reemplaza el valor hallado de x_v en la fórmula de la función dada.

Recordando que la expresión de nuestra función era:

$$h\ (t) = -\ 2t^2 + 6t + 8$$

Reemplacemos **t** por el valor de y_v o sea por 1,5:

$$h\ (y_v) = -2\ (1,5)^2 + 6 \cdot 1,5 + 8 = 12,5$$

Hemos hallado el valor de la altura máxima, que es de 12,5 metros.

Existe también una fórmula que permite hallar las coordenadas del vértice sin tener que hallar previamente las raíces. Veamos cómo se obtiene esta fórmula. Nuevamente le recordamos que no es necesario que usted recuerde todo el desarrollo que conduce a la obtención de la fórmula, simplemente deberá recordar la fórmula y aplicarla cuando lo considere conveniente.

Veamos cómo se llega a esta fórmula. Debemos partir de la ecuación dada en forma general:

$$f\ (x) = ax^2 + bx + c\ (*)$$

Podemos observar que, si en esta fórmula se reemplaza **x** por cero, se obtiene:

$$f\ (0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

La función toma valor **c** cuando la **x** vale cero.

Por lo tanto el punto (0; c) es un punto de la parábola. Hallemos el simétrico de este punto, o sea encontremos el otro valor de **x** para el cual la función también toma valor **c**. Estamos, pues buscando otro valor para el cual $f\ (x) = c$.

Reemplazando $f\ (x)$ por **c** en la expresión (*) nos queda:

$$ax^2 + bx + c = c$$

Despejando:

$$ax^2 + bx + c - c = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

Sacando factor común **x**:

$$x\ (ax + b) = 0$$

Como este producto debe dar cero, o $x = 0$ o $ax + b = 0$.

Despejando obtenemos: $x = 0$ o $x = -\ b/a$.

Por lo tanto $x = 0$ y $x = - b/a$ son los dos valores de x para los cuales $f(x) = c$

Hemos encontrado, algebraicamente, dos puntos simétricos.

Calculemos ahora las coordenadas del vértice como hicimos antes, sumemos los puntos simétricos y dividamos por dos:

$$x_v = \frac{0 + (- b/a)}{2}$$

$$x_v = - b/2a$$

Hemos encontrado una expresión que nos permite calcular el x_v si conocemos los coeficientes de la forma general de la función cuadrática, o sea los coeficientes de la expresión (*).

Para hallar el valor de y_v procedemos como se indicó anteriormente, reemplazamos el valor de x_v en la función dada:

$$y_v = f(x_v)$$

Apliquemos estas fórmulas a los datos de nuestro problema. Recordemos nuestra función: $h(t) = - 2t^2 + 6t + 8$ donde $a = -2$, $b = 6$ y $c = 8$.

Reemplacemos estos valores en la fórmula: $x_v = - b/2a$.

$$x_v = - 6/2 \cdot (-2) = - 6/(- 4) = 1,5$$

Hemos obtenido la coordenada x del vértice.

Ahora tomemos este valor y reemplacémoslo en la función:

$$y_v = f(x_v) = -2\,(1,5)^2 + 6 \cdot 1,5 + 8 = 12,5$$

Hemos obtenido la coordenada y del vértice, que en el caso de nuestro problema representa la altura máxima alcanzada.

Conclusión

- *Las raíces de una función cuadrática pueden calcularse mediante la fórmula:*

$$x_{1,2} = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_{1,2}$ significa que la misma fórmula permite calcular x_1 y x_2. En un caso hay que sumar el resultado del la raíz cuadrada y en el otro hay que restarlo.

- *Las coordenadas del vértice de una parábola pueden calcularse mediante la fórmula:*

$$V = [- b/2a;\ f(-b/2a)]$$

Veamos cómo resolver el **punto 3** sin hacer una tabla de valores. Para ello utilizaremos los puntos que fuimos calculando en los puntos anteriores y los iremos marcando en el gráfico:

a | Las raíces (sobre el eje x). En nuestro caso los puntos (-1, 0) y (4, 0).

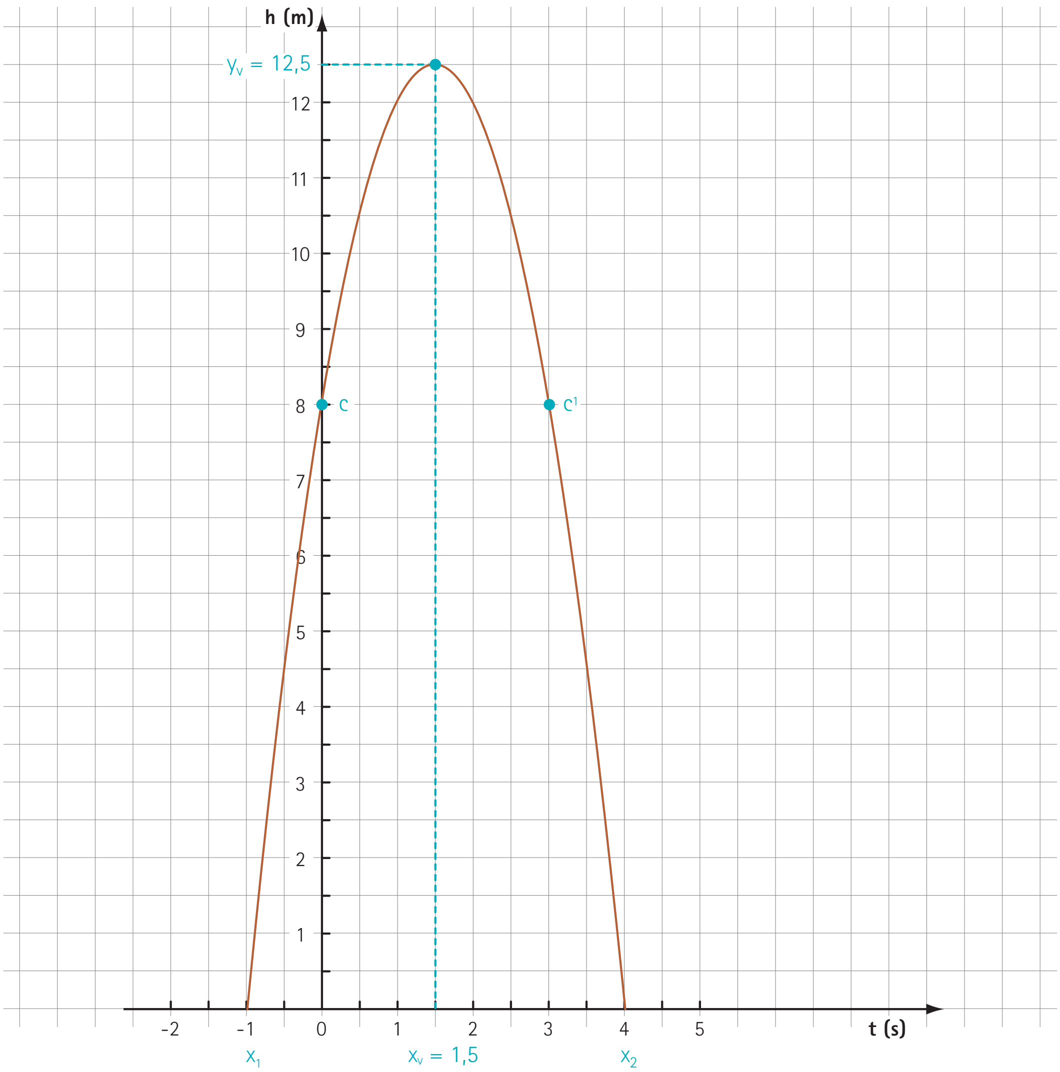
b | El vértice. En nuestro caso el punto (1,5; 12,5).

c | El punto (0, c) sobre el eje y. En nuestro caso el punto (0, 8).

d | El simétrico de (0, c) con respecto al eje de simetría de la parábola, o sea a la recta vertical que pasa por el vértice.

Luego unimos esos puntos.

En el caso de nuestro problema:



Veamos ahora algunos casos especiales.

Ejemplo 1

Supongamos que queremos graficar la siguiente función:

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$$

Calculemos primero las raíces utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{b - b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso **a = 2, b = 4** y **c = 2**.

Reemplacemos estos valores en la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 0}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 0}{4} = -1$$

Obtenemos el mismo valor para x_1 y para x_2. Esto significa que la función tiene una sola raíz, o sea un solo punto donde la parábola toca al eje **x**.

Calculemos ahora el vértice utilizando también las fórmulas correspondientes.

Hallemos primero la coordenada **x** del vértice:

$$x_v = -b/2a$$

Reemplazando por los valores correspondientes se obtiene:

$$x_v = -4/2 \cdot 2$$

$$x_v = -4/4 = -1$$

Hallemos ahora la coordenada **y** del vértice reemplazando el valor hallado de x_v en la función dada:

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$$

$$y_v = 2 \cdot (-1)^2 + 4(-1) + 2 = 2 \cdot 1 - 4 + 2 = 0$$

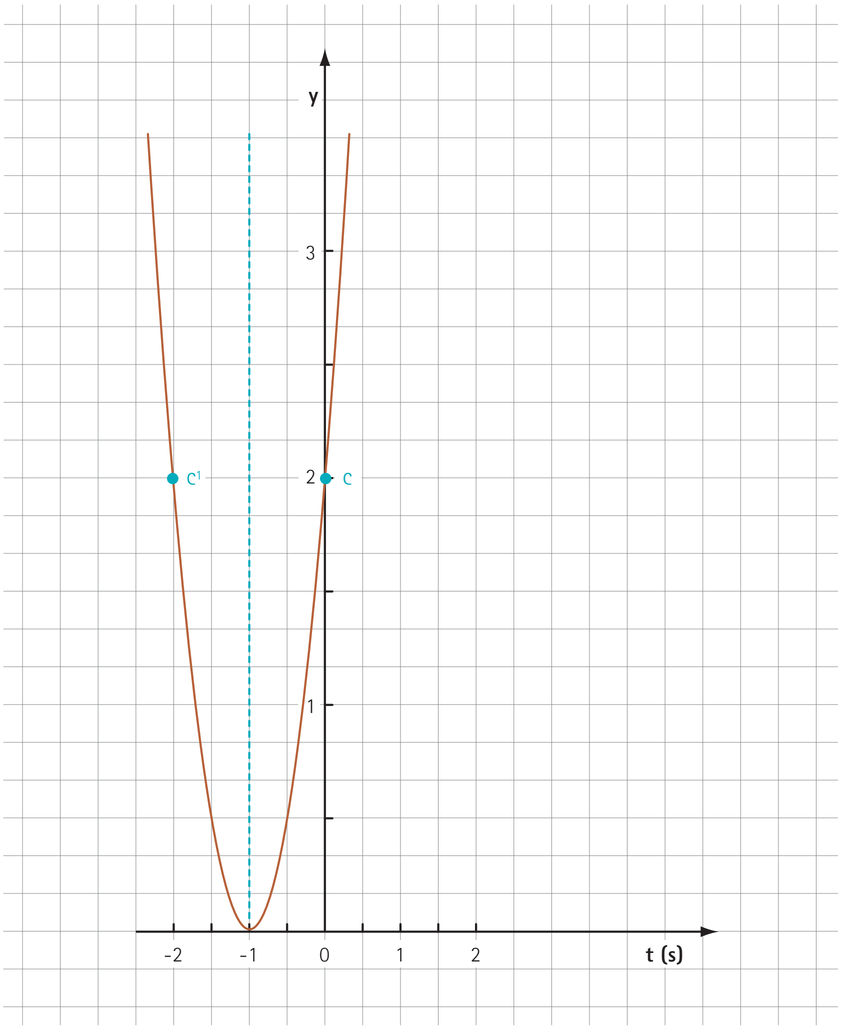
El vértice, por lo tanto estará en el punto (- 1; 0). Este punto es, además, la raíz de la función.

Grafiquemos ahora la función, marcando:

a | La raíz sobre el eje **x**. En este punto estará también el vértice.

b | El punto (0,c) sobre el eje **y**. En nuestro caso el punto (0, 2).

c | El simétrico de (0, 2) con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice.



Ejemplo 2

Supongamos que queremos graficar la siguiente función:

$$f(x) = x^2 + x + 2$$

Calculemos primero las raíces utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso **a = 1, b = 1** y **c = 2**.

Reemplacemos estos valores en la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2 \cdot 1}$$

En este caso debemos calcular la raíz cuadrada de un número negativo. Como la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real, y por lo tanto no podemos calcularla llegamos a la conclusión de que la función no tiene raíces. Gráficamente esto significa que la parábola no cortará al eje **x** en ningún punto.

Calculemos ahora el vértice utilizando también las fórmulas correspondientes.

Hallemos primero la coordenada **x** del vértice:

$$x_v = -b/2a$$

Reemplazando por los valores correspondientes se obtiene:

$$x_v = -1/2 \cdot 1$$

$$x_v = -1/2$$

Hallemos ahora la coordenada **y** del vértice reemplazando el valor hallado de x_v en la función dada:

$$f(x) = x^2 + x + 2$$

$$x_v = (-1/2)^2 + (-1/2) + 2 = 1/4 - 1/2 + 2 = 7/4$$

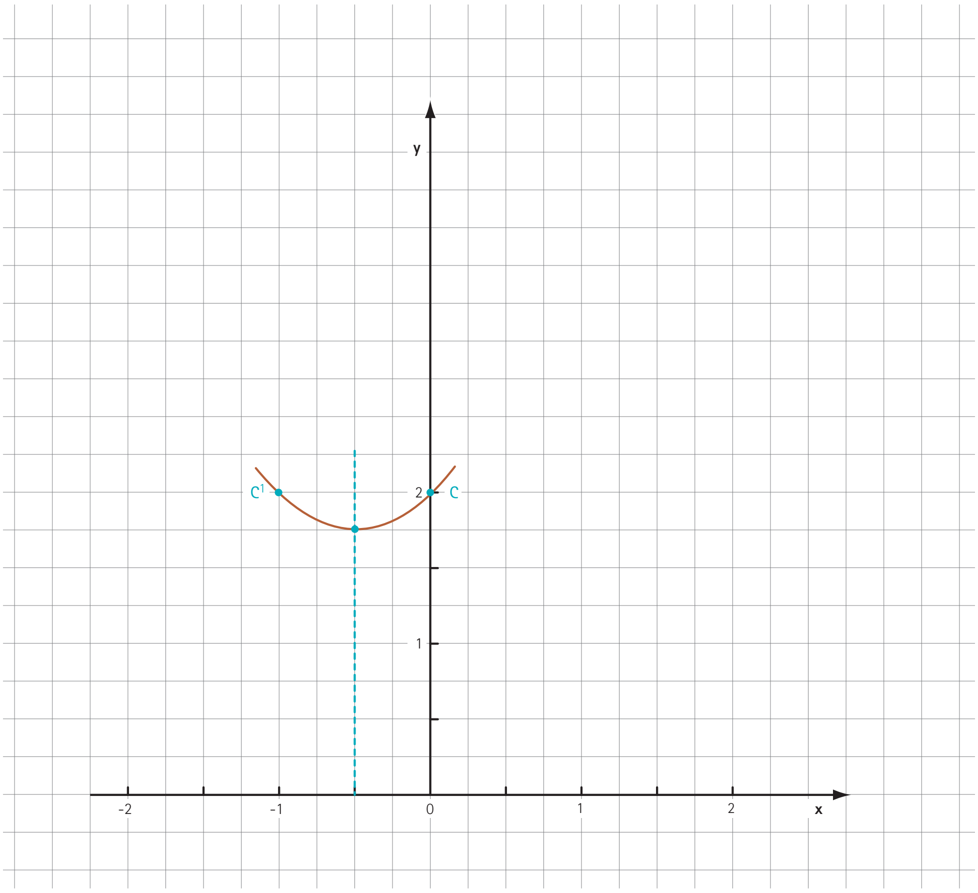
El vértice, por lo tanto estará en el punto (-1/2; 7/4).

Grafiquemos ahora la función, marcando:

a | El vértice. En nuestro caso el punto (- 1/2; 7/4).

b | El punto (0,c) sobre el eje **y**. En nuestro caso el punto (0, 2).

c | El simétrico de (0, 2) con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice.



Nótese que al aplicar la fórmula para calcular las raíces pueden presentarse tres situaciones:

a | Que el resultado sea un número positivo, en cuyo caso tengo dos soluciones, x_1 y x_2. La función tiene dos raíces y su gráfica corta al eje **x** en dos puntos, como en el caso del problema 7.

b | Que el resultado sea cero, en cuyo caso tengo una sola solución, pues $x_1 = x_2$. La función tiene una sola raíz y su gráfica toca al eje **x** en un solo punto, como en el caso del ejemplo 1.

c | Que el resultado sea un número negativo, en cuyo caso no existe solución pues no hay ningún número real que sea solución de una raíz cuadrada negativa. La función no tiene raíces y su gráfica no corta al eje **x**, como en el caso del ejemplo 2.

ACTIVIDAD 47

En el Módulo de Matematica - Funciones usted ya trabajó con el siguiente problema.

El INTA determinó experimentalmente que si **x** es el número de árboles por encima de 50 en una hectárea, el total de la producción **p** está dado por la fórmula.

$$p = -x^2 + 30x + 30.000$$

El chacarero quiere saber, naturalmente, hasta cuántos árboles puede plantar por encima de 50 para que su producción total no empiece a disminuir, y cuál sería la producción máxima que podría obtener.

:| Relea sus apuntes y vea cómo resolvió este problema.

:| Ahora le pedimos que resuelva este problema algebraicamente y compare sus respuestas con las que obtuvo anteriormente.

:| Responda, además, la siguiente pregunta: ¿A partir de qué cantidad de árboles la producción se hace cero?

ACTIVIDAD 48

A continuación le presentamos otro problema con el cual usted ya trabajó en el Módulo de Matematica - Funciones.

En una isla se introdujeron ciervos. Con recuentos durante varios años se estableció que el número de animales en función del tiempo transcurrido desde su introducción está dado por la fórmula: $n = -t^2 + 21t + 100$, siendo **n** el número de ciervos y **t** el tiempo en años.

Determine a partir de qué momento la cantidad de animales comenzó a disminuir, y cuál fue la máxima cantidad de ciervos que llegó a haber en la isla.

:| Relea sus apuntes y vea cómo lo resolvió.

:| Ahora resuelva algebraicamente los puntos anteriores y compare sus respuestas.

:| Por último responda la siguiente pregunta:

¿Se extingue en algún momento la población de ciervos? Si es así, ¿cuándo?

Funciones polinómicas de grado mayor que 2

Problema 8

¿Cuál debe ser el valor **x** de la arista del prisma del problema 6 para que el volumen sea de 378 cm^3?

Necesitamos encontrar para qué valor de **x**, la expresión: $6x^3 + 19x^2 + 15x$ es igual a 378. O sea, resolver la ecuación:

$6x^3 + 19x^2 + 15x = 378$, que es equivalente a $6x^3 + 19x^2 + 15x – 378 = 0$.

Para ello debemos encontrar las raíces de un polinomio de tercer grado.

Veamos cómo proceder.

Trabajemos primero con algunos ejemplos más sencillos.

Ejemplo 1

Supongamos que queremos hallar las raíces del polinomio:

$P(x) = x^3 – x^2 - 2x$

Eso significa que tenemos que resolver la ecuación:

$x^3 – x^2 - 2x = 0$

Como no disponemos de una fórmula para resolver esta ecuación, debemos encontrar una expresión equivalente a partir de la cual poder despejar **x**.

Sacando **x** de factor común obtenemos:

$x(x^2 - x – 2) = 0$

Hemos obtenido una expresión equivalente a la dada y que es igual al producto de dos factores: x y $x^2 - x – 2$. Como ya dijimos, para que el producto de dos factores sea igual a cero, alguno de esos factores debe ser igual a cero. Por lo tanto $x = 0$ o $x^2 - x – 2 = 0$.

Como $x^2 - x – 2$ es una función cuadrática aplicando la fórmula para hallar las raíces obtenemos $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$.

Aplique usted la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Y verifique que estos valores son correctos.

Hemos encontrado tres soluciones para la ecuación dada: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 0$.

Recordando que la forma factorizada de una función cuadrática es:

$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

Podemos escribir:

$x^2 - x - 2 = (x + 1) \cdot (x - 2)$

Como:

$P(x) = x\,(x^2 - x - 2)$

Reemplazando obtenemos: $P(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$ que es la forma factorizada del polinomio dado.

Ejemplo 2

Hallar las raíces de:

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

En este caso debemos resolver la ecuación:

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

Esto significa encontrar los valores de x que hacen cero al polinomio dado.

Para ello tengamos en cuenta que el polinomio dado será divisible por otro polinomio de la forma $x - a$ si a es una de las raíces del polinomio.

Con lo cual podemos escribir:

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - a) = c(x)$, con resto $R(x) = 0$

Ahora debemos emplear un procedimiento similar al que utilizamos para resolver la ecuación cuadrática. Si necesita relea la explicación de la página 83.

Necesitamos encontrar una raíz para reemplazar su valor en $x - a$ y poder dividir.

Procedemos por tanteo.

Por ejemplo:

Para $x = 1$ $P(x) = (1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6) = -8$ entonces $x = 1$ no es raíz.

Para $x = 2$ $P(x) = (2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6) = 0$ entonces $x = 2$ es raíz.

Reemplazando:

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2) = c(x)$ (*)

Ahora debemos hacer la división. Como el divisor es de la forma $x - a$ donde a vale 2, podemos aplicar la regla de Ruffini:

dado	1	2	-5	-6	→ Coeficientes del polinomio
		+	+	+	
a = 2		2	8	6	
	1	4	3	0	→ Resto

Coeficientes de C (x)

Hemos obtenido:

$$C\,(x) = x^2 + 4x + 3$$

Reemplazando en (*) nos queda:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2) = x^2 + 4x + 3$$

Despejando:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = (x - 2) \,.\, (x^2 + 4x + 3)$$

Nuevamente hemos escrito el polinomio dado como producto de dos factores:

$$(x - 2) \text{ y } (x^2 + 4x + 3)$$

:| ¿Cómo haría usted para encontrar las raíces que faltan?

:| Compare su respuesta con la que mostramos a continuación.

Debemos encontrar las raíces de $(x^2 + 4x + 3)$.

Como se trata de una función cuadrática, aplicamos la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obtenemos: $x_1 = -1$ y $x_2 = -3$.

:| Aplique usted la fórmula y verifique estos resultados.

:| Escriba ahora la expresión factorizada del polinomio dado.

Hemos hallado las raíces de: $P\,(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -3 \qquad x^3 = 2$$

Cuya forma factorizada es: $P\,(x) = (x + 1)\,(x + 3)\,(x - 2)$

SÍNTESIS

Para hallar las raíces de un polinomio de grado 3 procedemos de la siguiente forma:

1 | Hallamos por tanteo una de las raíces.

2 | Dividimos el polinomio dado por otro de la forma **x – a**, donde **a** es la raíz hallada en el punto 1 y obtenemos un polinomio de grado 2.

3 | Aplicamos la fórmula para calcular las raíces de una función cuadrática al cociente de esa división.

Si el polinomio es de grado mayor que 3 procedemos así:

1 | Hallamos por tanteo una de las raíces.

2 | Dividimos el polinomio dado por otro de la forma $x - a$ donde a es la raíz hallada en 1 y obtenemos un polinomio cuyo grado es uno menos que el del polinomio dado.

3 | Hallamos por tanteo una raíz del polinomio cociente.

4 | Dividimos ese polinomio por otro de la forma $x - a$ donde a es la nueva raíz hallada.

5 | Repetimos los pasos 3 y 4 hasta que el polinomio cociente sea de grado 2.

6 | Aplicamos la fórmula para calcular raíces de una función cuadrática al cociente de esa división.

:| Intente, ahora, resolver el problema 8. Compare su respuesta con la que le proponemos a continuación.

Debíamos resolver la ecuación:

$$6x^3 + 19x^2 + 15x - 378 = 0$$

Primero buscamos, tanteando, una raíz. Probamos de reemplazar x por distintos valores hasta encontrar uno que haga que la cuenta dé cero. Por ejemplo:

Si $x = 3$

$$6 \cdot 3^3 + 19 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 - 378 = 162 + 171 + 45 - 378 = 0$$

Ahora debemos dividir: $6x^3 + 19x^2 + 15x - 378$ por $x - 3$.

Aplicamos la regla de Ruffini.

	6	19	15	-378
		+	+	+
a = 3		18	111	378
	6	37	126	0

Con lo cual podemos escribir:

$$6x^3 + 19x^2 + 15x - 378 = (x - 3)(6x^2 + 37x + 126)$$

Ahora debemos encontrar las raíces de $(6x^2 + 37x + 126)$. Como se trata de un polinomio de grado 2 aplicamos la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 6$, $b = 37$ y $c = 126$.

Vemos que al reemplazar en la fórmula los valores de **a**, **b** y **c** nos queda la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto el polinomio $6x^2 + 37x + 126$ no tiene raíces reales. Con lo cual la única raíz del polinomio dado es $x = 3$.

La respuesta a nuestro problema es que la arista **x** debe valer 3.

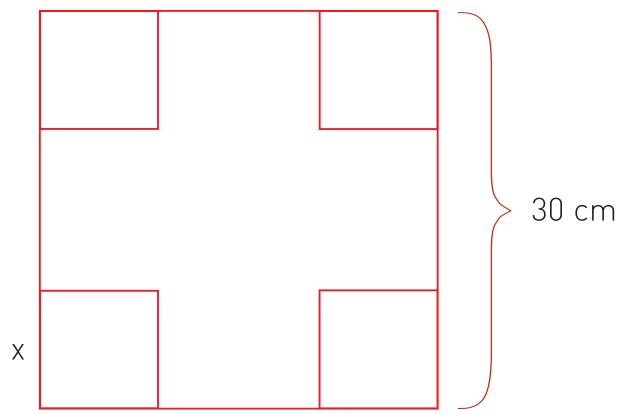
ACTIVIDAD **49**

:| Escriba la forma factorizada de los siguientes polinomios:

a :| $P(x) = 3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18$

b :| $Q(x) = 5x^4 - 125x^2 + 720$

ACTIVIDAD **50**



Con un cuadrado de cartón cuyos lados miden 30 cm. queremos construir una caja abierta recortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados restantes. Si **x** es el lado del cuadrado que hay que recortar:

a :| Encuentre una expresión que permita calcular el volumen de la caja, dependiendo de la longitud **x** del cuadrado que se recorta en cada esquina.

b :| ¿Qué volumen tendrá la caja si se recortan cuadrados de 4 cm. de lado?

c :| ¿Cuánto debe medir el lado del cuadrado a recortar para que el volumen de la caja sea exactamente de 1.944 cm^3?

Autoevaluación

EJERCICIO 1

Un examen consta de 20 preguntas. Cada pregunta bien contestada vale 0,5 puntos y cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos. Si no contesta alguna pregunta no suma ni resta puntos. Un alumno no contestó 2 preguntas y obtuvo un cuatro. ¿Cuántas preguntas contestó correctamente?

EJERCICIO 2

Rubén es dueño de una librería. Encarga resmas de papel a un mayorista que le cobra $ 9 cada resma más un adicional de $6 en concepto de flete.

:| ¿Cuántas resmas puede encargar si quiere pagar, a lo sumo, $100 en total?

EJERCICIO 3

Juan es panadero. Necesita comparar harina. Consigue una parte de los paquetes de harina en oferta a $1,5 cada uno, pero no le alcanza y decide comprar la otra parte en paquetes que cuestan $1,8 cada uno. Gasta en total $40,5. Los paquetes que consiguió en oferta son 5 más que los otros.

:| ¿Cuántos paquetes de cada clase compró?

EJERCICIO 4

La velocidad v (en m/s) de un misil t segundos después de haber sido lanzado está dada por la siguiente fórmula: $v(t) = -t^2 + 18t + 40$

a :| ¿Cuál es la velocidad máxima alcanzada por el misil?

b :| ¿Cuántos segundos después de haber sido lanzado alcanza la velocidad máxima?

c :| ¿Luego de cuántos segundos se detiene el misil?

d :| ¿En qué momento la velocidad del misil fue de 100 m/s?

e :| ¿En qué momento la velocidad del misil fue de 150 m/s?

EJERCICIO 5

En un laboratorio se toma la temperatura de una cierta sustancia a partir de las 8 de la mañana. Se obtiene la siguiente fórmula que permite calcular la temperatura, en grados, de esa sustancia en función del tiempo a partir del cual se comenzaron a realizar las mediciones: $T(t) = 0{,}2\ t^3 - 5{,}6\ t^2 + 36\ t$.

a :| ¿cuál fue la temperatura a las 5 horas de haber comenzado las mediciones?

b :| ¿A qué hora la temperatura era de 0 ºC?

c :| ¿Hubo algún momento en el cual la temperatura era bajo cero?

Clave de corrección

ACTIVIDAD 1

a :| Los números naturales se usan siempre que haya que contar algo: personas, objetos, animales, días, meses, años, etc.

b :| La suma y la multiplicación de números naturales es siempre un número natural. La potenciación de números naturales con exponente natural es siempre un número natural.

c :| La resta, división y la radicación de naturales no siempre es un número natural.

ACTIVIDAD 2

a :| Los números negativos se utilizan para indicar temperaturas bajo cero, altura bajo el nivel del mar, deudas, años antes de Cristo, etc.

b :| La suma, la resta y la multiplicación de enteros es siempre un número entero. La potenciación de enteros con exponente natural es siempre un número entero.

c :| La división y la radicación de enteros no siempre es un número entero.

ACTIVIDAD 3

$\frac{1}{2} = 0,5$ $\quad$ $-\frac{13}{9} = -1,\overset{\frown}{4}...$ $\quad$ $\frac{61}{137} = 0,444525547....$ $\quad$ $2 = 2$

$-3 = -3$ $\quad$ $0 = 0$ $\quad$ $5/4 = 1,25$ $\quad$ $3/8 = 0,375$

ACTIVIDAD 4

a :| Cuando se compra 1/2 kg de pan. Cuando se saca un boleto de colectivo de $1,25. Cuando se dice que una persona mide 1,70 m, etc.

b :| La suma, resta, multiplicación y división de racionales es siempre un número racional. La potenciación de números racionales con exponente natural es siempre racional.

c :| La radicación de números racionales no siempre es un número racional.

ACTIVIDAD 5

Por ejemplo para calcular la superficie de una figura circular o para calcular la diagonal de un cuadrado cuyos lados miden 1 m.

ACTIVIDAD 6

a :| El doble de un número a: $2a$

b :| La tercera parte de un número c: $1/3\ c$

c :| El cuadrado de un número x: x^2

d :| El anterior del cuadrado de un número n: $n^2 - 1$

e :| El cuadrado del siguiente de un número d: $(d + 1)^2$

f :| El producto de un número a por su siguiente: $a \cdot (a + 1)$

g :| La diferencia entre un número c y su consecutivo: $c - (c + 1)$

ACTIVIDAD 7

Las siguientes expresiones traducen que la edad de Pedro supera en 6 años la edad de Martín:

c :| $p - 6 = m$

d :| $p = m + 6$

e :| $p - m = 6$

ACTIVIDAD 8

a :| $3b + 2c + 4d$

El triple de un número más el doble de otro número, más el cuádruplo de otro.

b :| $x^2 = 9$

El cuadrado de un número es igual a nueve.

c :| $5x$

El quíntuplo de un número.

d :| $a^2 + b^2$

La suma de los cuadrados de dos números.

e :| $2^x = 8$

Dos elevado a un cierto número es igual a 8.

f :| $2 (x + 1) = 4x$

El doble del siguiente de un número es igual al cuádruplo de dicho número.

g :| $3x + 2y = 5$

La suma del triple de un número más el doble de otro es igual a cinco.

h :| $S = b.\ h/2$

La superficie es igual a la mitad del producto entre la base y la altura.

i :| $4 = x + 1$

Cuatro es igual al siguiente de un número.

j :| $a + 1 = a + 2$

El siguiente de un número es igual a dicho número aumentado en dos unidades.

k :| $2b = b + b$

El doble de un número es igual a la suma de dicho número con sí mismo.

ACTIVIDAD 9

a :| El cuadrado de la suma de dos números **a** y **b**

b :| El triple del anterior de un número **c**

c :| El cuadrado de un número **a** disminuido en **b** unidades

d :| El anterior del triple de un número **c**

e :| La diferencia entre los cubos de dos números **a** y **b**

f :| El cubo de la diferencia de dos números **a** y **b**

$a^3 - b^3$

$3c - 1$

$(a - b)^3$

$(a + b)^2$

$3 (c - 1)$

$a^2 - b$

ACTIVIDAD 10

a :| $2a - 3b + 4 (a - b) = 2a - 3b + 4a - 4b = 6a - 7b$

Se utilizó la propiedad distributiva y la propiedad conmutativa. Luego se sumaron los términos semejantes.

b :| $2ab + 3 (a - b) + 4b - 5ab = 2ab + 3a - 3b + 4b - 5ab = -3ab + 3a + b$

Se utilizó la propiedad distributiva y la propiedad conmutativa. Luego se sumaron los términos semejantes.

c :| $x + x^2 - 3x + 4x^2 = - 2x + 5x^2$

Se utilizó la propiedad conmutativa y se sumaron los términos semejantes.

d :| $x + 2y - (x + y) = x + 2y - x - y = y$

Se utilizó la propiedad distributiva y la propiedad conmutativa. Luego se sumaron los términos semejantes.

ACTIVIDAD 11

a :| $3b \cdot 4a^4 \cdot 5ab^2 = 60a^5 b^3$

b :| $4x \cdot 2x^2 = 8x^3$

c :| $5xy \cdot 4x^2 y = 20x^3 3y^2$

d :| $- 3a \cdot 2ab \cdot (- 3b^2) = -18a^2 b^3$

ACTIVIDAD 12

a :| $x + 2x = 3x$

b :| $x \cdot 2x = 2x^2$

c :| $x \cdot x \cdot x \cdot x + 2x^2 \cdot X^2 + 5x \cdot x^3 = 8x^4$

d :| $b + 2b + b^2 = 3b + b^2$

e :| $4x (2 - 3x + x) = 8x - 8x^2$

ACTIVIDAD 13

Algunas posibles soluciones:

a :| Tenga una sola solución $3x + 2 = 5$

b :| Tenga dos soluciones $x^2 = 25$

c :| No tenga solución $x + 2 = x + 3$

d :| Sea equivalente a $3x - 2 = 10$ $2x + 1 = 9$

e :| Cuyo conjunto solución sea $S = \{4\}$ $x + 1 = 5$

ACTIVIDAD 14 Y 15

Resueltas dentro del Módulo.

ACTIVIDAD 16 Ver Módulo.

ACTIVIDAD 17

a :| $x + x + 2 + x + 4 + x + 6 = 104$ siendo **x** lo que aporta Martín.

Martín aporta \$23, Pedro \$25, Luis \$27 y Juan \$29.

b :| $0{,}10x + 0{,}25\ (23 - x) = 4{,}55$ siendo **x** la cantidad de monedas de 10 centavos.

Tiene 8 monedas de 10 centavos y 15 monedas de 25 centavos.

c :| $600 + 12{,}5x = 1200$ siendo **x** la cantidad de afiliados.

Debe afiliar 48 personas por mes.

ACTIVIDAD 18

a :| Simbólicamente representamos un número par cualquiera como **2n** y un número impar cualquiera como **2m + 1**. Su suma será:

$$2n + 2m + 1$$

Sacamos factor común 2 y podemos escribir

$$2\ (n + m) + 1$$

Como la suma de dos números enteros **n** y **m** es otro número entero al que podemos llamar **k**, reemplazando nos queda:

$$2\ (n + m) + 1 = 2k + 1$$

Siendo **2k + 1** la expresión correspondiente a un número impar.

b :| Simbólicamente representamos un número par cualquiera como **2n** y otro número par como **2m**. Su producto será:

$$2n \cdot 2\ m$$

Aplicamos propiedad conmutativa del producto y obtenemos:

$$2 \cdot 2 \cdot n \cdot m$$

Como **2 · n · m** es un número entero pues el producto de números enteros es otro número entero, llamando **k** al resultado de **2 · n · m**, podemos escribir **2 · 2 · n · m = 2 · k**, siendo **2k** la expresión correspondiente a un número par.

c :| Simbólicamente representamos un número impar cualquiera como **2n + 1** y otro número impar como **2m + 1**. Su producto será:

$$(2n + 1) \cdot (2m + 1)$$

Aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y obtenemos

$$2n \cdot 2m + 2n + 2m + 1$$

Sacamos factor común 2 y podemos escribir:

$$2\ (2nm + n + m) + 1$$

Como el paréntesis corresponde a la expresión de un número entero por ser el producto y la suma de enteros otro número entero, llamamos **k** al resultado del paréntesis y escribimos: $2\,(2nm + n + m) + 1 = 2k + 1$,

Siendo $2k + 1$ la expresión correspondiente a un número impar.

d :| Simbólicamente representamos un número par cualquiera como $2n$ y un número impar cualquiera como $2m + 1$. Su producto será:

$$2n \cdot (2m + 1)$$

Aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y obtenemos:

$$2n \cdot 2m + 2n$$

Sacamos factor común 2 y podemos escribir:

$$2\,(2nm + 1)$$

Como el paréntesis es un número entero, llamamos **k** al resultado de ese paréntesis y escribimos: $2\,(2\,n\,m + 1) = 2k$,

Siendo $2k$ la expresión correspondiente a un número par.

ACTIVIDAD 19

El valor que ocupará el décimo lugar en cada una de las siguientes sucesiones será:

a :| 2, 5, 10, 17, 26, ... cada número de la sucesión se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa y sumándole 1.

Para calcular el décimo número la operación es: $10^2 + 1 = 101$ en general: $n^2 + 1$.

b :| 2, 5, 8, 11, 14, ... cada número de la sucesión se obtiene mediante la siguiente expresión: $3n – 1$. El décimo valor será: $3 \cdot 10 – 1 = 29$.

ACTIVIDAD 20

a :| $n \leq 4$

b :| $-2 < x < 5$

c :| $4c \leq 15$

d :| $p \leq j$

e :| $m \geq 2L$

f :| $n \leq m$

ACTIVIDAD 21

Se reemplazan los valores propuestos en la inecuación y se eligen los que verifican la desigualdad o se resuelve la inecuación y se eligen los valores que pertenecen al conjunto solución.

Si $x = 0$ $\quad 3\,(0 – 1) + 2 > 5 \cdot 0 – 2$

$3 \cdot (-1) + 2 > 0 - 2$

$-3 + 2 > -2$

$-1 > -2$ verdadero, luego $x = 0$ es una solución

Si **x = -2** $\quad 3(-2 - 1) + 2 > 5 \cdot (-2) - 2$

$3 \cdot (-3) + 2 > -10 - 2$

$-9 + 2 > -12$

$-7 > -12$ verdadero, luego **x = - 2 es una solución**

Si **x = 2** $\quad 3(2 - 1) + 2 > 5 \cdot 2 - 2$

$3 \cdot (1) + 2 > 10 - 2$

$3 + 2 > 8$

$5 > 8$ falso, luego **x = 2 no es una solución**

Si **x = 1/2** $\quad 3(1/2 - 1) + 2 > 5 \cdot 1/2 - 2$

$3 \cdot (-1/2) + 2 > 5/2 - 2$

$-3/2 + 2 > 1/2$

$1/2 > 1/2$ falso, luego **x = 1/2 no es una solución**

Otra forma es resolver la inecuación, pero en esta parte del Módulo todavía no se vio resolución de inecuaciones:

$3(x - 1) + 2 > 5x - 2$

$3x - 3 + 2 > 5x - 2$

$3x - 5x > -2 + 3 - 2$

$-2x > -1$

$x < 1/2$

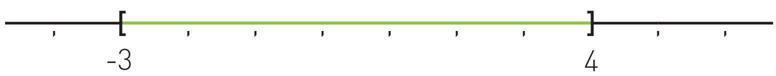
El conjunto solución está formado por todos los números menores que 1/2.

Por lo tanto de los valores propuestos, los que cumplen con esta condición son el **0** y el **-2**.

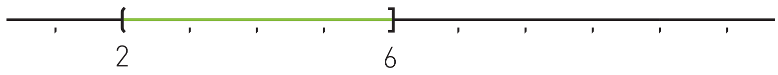
ACTIVIDAD 22

Las inecuaciones expresadas como intervalos de números reales y representados en la recta numérica resultan:

a :| $\quad -3 \leq x \leq 4 \qquad [-3; 4]$

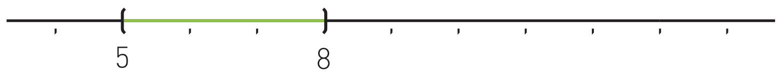


b :| $2 < x \leq 6$ $(2; 6]$

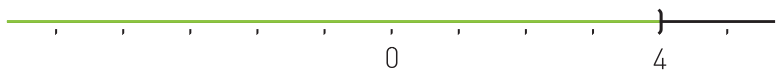


c :| $-4 \leq x < 4$ $[-4; 4)$

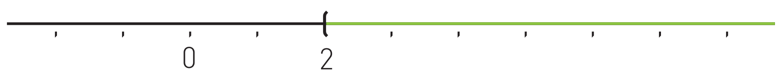
d :| $5 < x < 8$ $(5; 8)$



e :| $x \leq 4$ $(-\infty; 4]$



f :| $x > 2$ $(2; +\infty)$



ACTIVIDAD 23

La desigualdad se mantiene en todos los casos menos el **f** y el **h**.

Conclusión: si se multiplican o dividen ambos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.

ACTIVIDAD 24

$33 + 0{,}045\,x \leq 50$ siendo **x** la cantidad de minutos.

$$0{,}045\,x \leq 50 - 33$$
$$0{,}045\,x \leq 17$$
$$x \leq 17 : 0{,}045$$
$$x \leq 377{,}77$$

La persona no debe hablar más de 377 minutos.

ACTIVIDAD 25

$2x + 29 \leq 50$ siendo **x** el precio de cada remera.

Cada remera no puede costar más que $10,50.

ACTIVIDAD 26

a :| $3x - 2x + 2 < 2\,(x - 1)$

$$x + 2 < 2\,x - 2$$
$$x - 2x < -2 - 2$$
$$-x < -4$$
$$x > 4$$

Cualquier número entero mayor que **4**, por ejemplo **5**, **6** y **7**.

b :| $5x - 3 \geq 2x - (x + 3)$

$$5x - 3 \geq 2x - x - 3$$
$$5x - 3 \geq x - 3$$
$$5x - x \geq -3 + 3$$
$$4x \geq 0$$
$$x \geq 0$$

Cualquier número entero mayor o igual que cero, por ejemplo: **0**, **1** y **2**.

ACTIVIDAD 27

a :| $x < 1$ $\quad S = (-\infty;\, 1)$

b :| $x \geq -2$ $\quad S = [-2;\, \infty)$

ACTIVIDAD 28

a :| J = M + 10

Algunas posibles soluciones son (160, 170); (165,175); (171,181)

Son infinitas.

b :| 2n + 3p = 36

Algunas soluciones (3,10); (6,8); (9,6) son finitas.

c :| P + M = 100

Algunas soluciones son (52,20; 47,80); (90; 10); (25; 75)(12,50; 87,50) son infinitas.

d :| a – b = 14

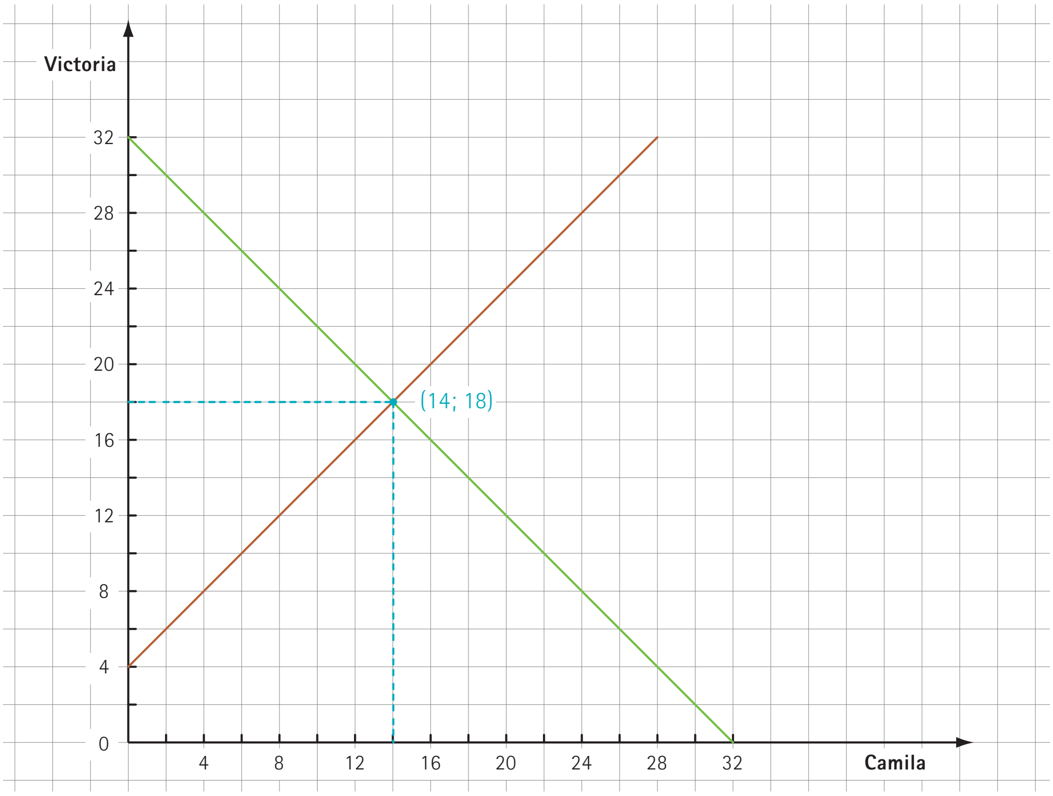
Algunas soluciones son (1, 15); (-3; 11); (0,5; 14,5); (2/3; 44/3) son infinitas

ACTIVIDAD 29

El sistema a resolver es v = c + 4

v + c = 32

Camila tiene 14 años y Victoria tiene 18 años.



ACTIVIDAD 30

a :| El sistema a resolver es:

$$a + b = 90$$
$$a = 3b$$

Reemplazando en la primera expresión **a** por **3b** obtenemos:

$$3b + b = 90$$
$$4b = 90$$
$$b = 90/4 = 22,5$$

Por lo tanto:

$$a = 90 - b = 90 - 22,5 = 67,5$$

Como se trata de ángulos uno de ellos medirá **22° 30’** y el otro medirá **67° 30’**.

b :| El sistema a resolver es:

$$0,10x + 0,25y = 30$$
$$x + y = 150$$

Despejando de la segunda ecuación:

$$y = 150 - x$$

Reemplazando en la primera:

$$0,10x + 0,25\,(150 - x) = 30$$

Operando:

$$0,10x + 37,5 - 0,25x = 30$$
$$-0,15x = 30 - 37,5$$
$$-0,15x = -7,5$$
$$x = -7,5 : (-0,15)$$
$$x = \mathbf{50}$$

Luego:

$$y = 150 - x = 150 - 50 = \mathbf{100}$$

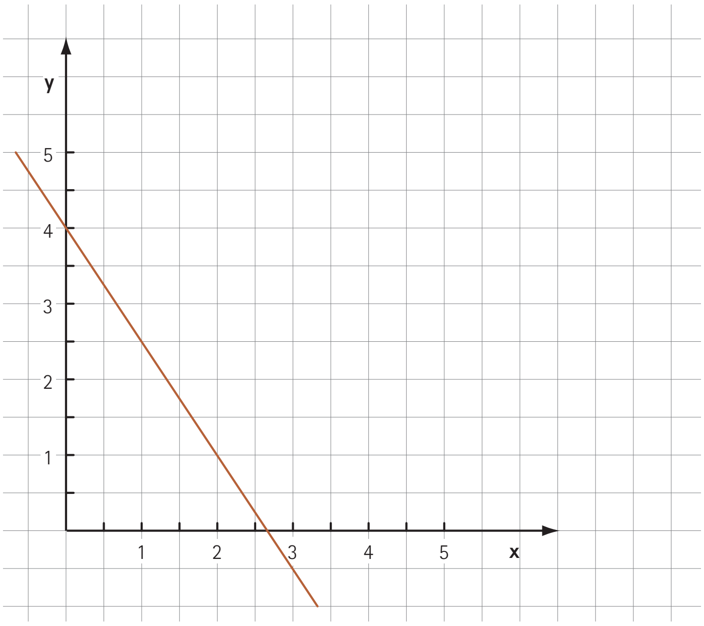
Recibió 50 monedas de 10 centavos y 100 monedas de 25 centavos.

ACTIVIDAD **31**

a :|

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 6x + 4y = 16 \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado, S = R.



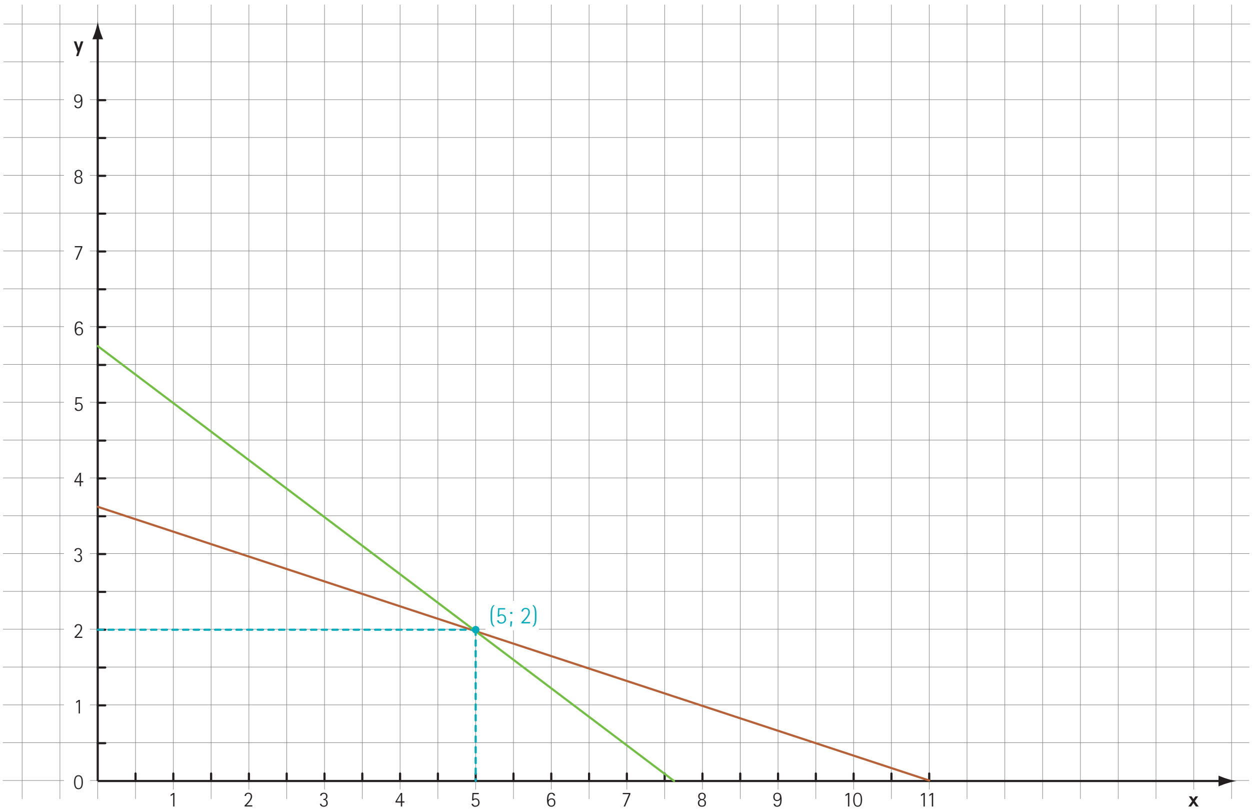
b :|

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

Sistema incompatible, S = ∅.

c :| $\begin{cases} 3x + 4y = 23 \\ 2x + 6y = 22 \end{cases}$

Sistema compatible determinado, $S = \{(5; 2)\}$.



ACTIVIDAD 32

El sistema a resolver es:

$x + y = 100$

$0{,}5x + 0{,}25y = 35$

Donde **x** representa la cantidad de monedas de 50 centavos e **y** la cantidad de monedas de 25 centavos.

La respuesta es: Pedro juntó 40 monedas de 50 centavos y 60 monedas de 25 centavos.

El sistema es compatible determinado.

ACTIVIDAD 33

El sistema a resolver es:

$x = y$

$2x + 5y = 100$

Como **x** e **y** representan la cantidad de billetes de cada clase y la solución del sistema no es un par de números naturales la respuesta es que no es posible.

El sistema es compatible determinado.

ACTIVIDAD 34

:| Las expresiones correspondientes a cada empresa son:

Empresa A: $y = 2{,}5x + 15$

Empresa B: $y = 3{,}25x$

a :| Reemplazando en cada una de las expresiones anteriores **x** por 10 se obtiene:

Empresa A: 40

Empresa B: 32,5

Por lo tanto conviene comprar en la empresa **B**.

b :| Debemos resolver el sistema:

$y = 2{,}5x + 15$

$y = 3{,}25x$

Igualamos:

$2{,}5x + 15 = 3{,}25x$

Despejando obtenemos:

$x = 20$

Respuesta:

Deberían comprar **20 m²**.

ACTIVIDAD 35

Hay que resolver el sistema:

$2J + 4F = 60$

$J + 2F = 30$

El sistema resulta indeterminado. Por lo tanto tiene infinitas soluciones.

El conjunto solución es: **S = R**. Entonces no es suficiente la información.

ACTIVIDAD 36

Según Marcela el sistema a resolver es:

$E + M = 200$

$M = E + 50$

$E - 20 = M/2$

Según Esteban el sistema a resolver es:

$E + M = 200$

$M = E + 50$

$E - 12{,}5 = M/2$

En ambos sistemas las dos primeras ecuaciones son iguales.

Trabajando con ellas obtenemos:

$E = 75$, $M = 125$

Reemplazando estos valores en la tercera ecuación de cada uno de los sistemas vemos que la igualdad se verifica en el caso de Esteban.

Por lo tanto, **Esteban tiene razón**.

ACTIVIDAD 37

	Grado del polinomio	Coeficiente	Termino independiente
a :|	$n = 5$	$a_n = -2$	$a_0 = -2$
b :|	$n = 4$	$a_n = 3$	$a_0 = 3$
c :|	$n = 1$	$a_n = 5$	$a_0 = -2$
d :|	$n = 2$	$a_n = 3$	$a_0 = 0$
e :|	$n = 0$	$a_n = 5$	$a_0 = 5$

ACTIVIDAD 38

a :| $P(2) = -3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3 = -1$ $P(-1) = -3(-1)^2 + 4(-1) + 3 = -4$

b :| $Q(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 = -4$ $Q(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 2(-1) = 2$

c :| $R(2) = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 - 2 = -8$ $R(-1) = 5(-1) - 4(-1)^2 - 2 = -11$

ACTIVIDAD 39

a :| $P(x) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 9 = 0$

Sí, es raíz porque al reemplazar la **x** por 3 el valor numérico del polinomio es igual a cero.

b :| $Q(x) = -3^4 - 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 + 1 = 125$

No es raíz porque al reemplazar la **x** por 3 el valor numérico del polinomio es distinto de cero.

c :| $R(x) = 5 \cdot 3 - 15 = 0$

Sí, es raíz porque al reemplazar la **x** por 3 el valor numérico del polinomio es igual a cero.

d :| $T(x) = 3 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 = 72$

No es raíz porque al reemplazar la **x** por 3 el valor numérico del polinomio es distinto de cero.

ACTIVIDAD 40

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2$	grado 3
$Q(x) = 5x^2 + 3x - 1$	grado 2
$M(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 4$	grado 3
$R(x) = 2x^3 + 9x^2 + 3x + 1$	grado 3

$S(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 3$ grado 3

$N(x) = 10x^2 - 3x + 6$ grado 2

$T(x) = 10x^5 + 14x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 6x - 2$ grado 5

ACTIVIDAD 41

a :| $A(x) : B(x) =$ **$3x + 10$ resto $35x - 21$**

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^3 - 2x^2 + x - 1 & x^2 - 4x + 2 \\ \cline{3-3}
- & \underline{3x^3 - 12x^2 + 6x} & 3x + 10 \\
 & 10x^2 - 5x - 1 & \\
- & \underline{-10x^2 - 40x + 20} & \\
 & 35x - 21 &
\end{array}
$$

b :| $A(x) : C(x) =$ **$x^2 + x + 2$ resto 9**

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^3 - 2x^2 + x - 1 & 3x - 5 \\ \cline{3-3}
- & \underline{3x^3 - 5x^2} & x^2 + x + 2 \\
 & 3x^2 + x - 1 & \\
- & \underline{3x^2 - 5x} & \\
 & 6x - 1 & \\
- & \underline{6x - 10} & \\
 & 9 &
\end{array}
$$

El grado de **R (x)** es siempre menor que el grado de **B (x)**.

ACTIVIDAD 42

a :|

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 4 & -1 \\
 & & + & + \\
a = 1 & & 1 & 5 \\ \hline
 & 1 & 5 & 4
\end{array}
$$

$-1 \rightarrow$ Coeficientes del polinomio dado

$4 \rightarrow$ Resto

$\underbrace{1 \quad 5}_{\text{Coeficientes de C (x)}}$

$P(x) = x^2 + 4x - 1$

$P(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 4$

Cociente: x + 5 Resto 4 P (1) = 4

b :|

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 0 & -3 & 2 & -6 \\
 & & + & + & + & + \\
a = -3 & & -6 & 18 & -45 & 129 \\
\hline
 & \underbrace{2 \quad -6 \quad 15 \quad -43}_{\text{Coeficientes de } C(x)} & & & & 123
\end{array}
$$

$-6 \longrightarrow$ Coeficientes del polinomio dado

$123 \longrightarrow$ Resto

Coeficientes de C (x)

$Q(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x - 6$

$Q(-3) = 2(-3)^4 - 3 \cdot (-3)^2 + 2(-3) - 6 = 123$

Cociente $2x^3 - 6x^2 + 15x - 43$ resto 123 Q (- 3) = 123

c :| El resto de la división de un polinomio por otro de la forma **x - a** coincide con el valor numérico del polinomio para **x = a**.

ACTIVIDAD 43

Aplicando el Teorema del Resto reemplazamos **x** por **-4** en el polinomio dado y obtenemos el resto de la división.

$P(-4) = 4(-4)^3 + 5(-4)^2 - 2(-4) + 1 = -167$

Aplicando el teorema del resto reemplazamos **x** por **2** en el polinomio dado y obtenemos el resto de la división.

$P(2) = 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 49$

ACTIVIDAD 44

Si **P (x)** divisible por **Q (x)** el resto de la división debe ser 0, por lo tanto los valores numéricos de **P (x)** para **x = 1**, en el caso **a** y para **x = -3** en el caso **b** deben ser 0.

a :| $P(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1^3 - m = 0$

$1 + 2 + 4 - m = 0$

$7 - m = 0$

$m = 7$

b :| $P(-3) = 4(-3)^3 - 2(-3) + 3m = 0$

$4 \cdot (-27) + 6 + 3m = 0$

$-108 + 6 + 3m = 0$

$-102 + 3m = 0$

$3m = 102$

$m = 102/3$

$m = 34$

ACTIVIDAD 45

Un polinomio es divisible por otro si el resto de la división es igual a cero. Aplicamos el Teorema del Resto para calcular el resto de la división.

a :| $P(-1) = 3(-1)^4 - 2(-1)^3 + 2(-1) - 3 = 0$

Sí porque el resto es igual a cero.

b :| $P(3) = 3 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 - 3 = 192$

No porque el resto es distinto de cero.

c :| $P(1) = 3 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$

Sí porque el resto es igual a cero.

d :| $P(-2) = 3(-2)^4 - 2(-2)^3 + 2(-2) - 3 = 57$

No porque el resto es distinto de cero.

ACTIVIDAD 46

Hallamos los valores numéricos de **P (x)** para los distintos valores de **x** y las raíces corresponden a aquellos valores para los cuales el valor numérico es cero.

$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 24 = 12$

$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 24 = 0$

$P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 24 = -6$

$P(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 10 \cdot 4 + 24 = 0$

$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 10(-1) + 24 = 30$

$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 10(-2) + 24 = 24$

$P(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 10(-3) + 24 = 0$

Las raíces son: $x = 2$ $x = 4$ $x = -3$

ACTIVIDAD 47

Para responder la primera parte debemos hallar el vértice de la parábola.

Utilizando las fórmulas correspondientes y reemplazando **a** por -1, **b** por 30 y **c** por 30.000 obtenemos:

$x_v = -b/2a = -30/2(-1) = 15$

$y_v = f(vx) = -15^2 + 30 \cdot 15 + 30.000 = -225 + 450 + 30.000 = 30.225$

La respuesta al problema es: puede plantar 15 árboles por encima de 50 por hectárea y la producción máxima será de 30.225.

Para averiguar a partir de qué valor la producción se hace cero hay que hallar las raíces del polinomio utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{b - \ b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando **a**, **b** y **c** por sus respectivos valores se obtiene

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 30.000}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 120.000}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{120.900}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_1 = \frac{-30 + 347{,}71}{-2} = 158{,}85$$

$$x_2 = \frac{-30 + 347{,}71}{-2} = 158{,}85$$

$x_1 = -158{,}85$ y $x_2 = 188{,}85$

Como **x** representa la cantidad de árboles, debemos aproximar los resultados y descartar el resultado negativo. Por lo tanto la respuesta al problema será que a partir de 189 árboles por encima de 50 la producción es igual a cero.

ACTIVIDAD 48

Para responder la primera parte debemos hallar el vértice de la parábola.

Utilizando las fórmulas correspondientes y reemplazando **a** por -1, **b** por 21 y **c** por 100 obtenemos:

$x_v = -b/2a \ = -21/2\ (-1) = 10{,}5$

$y_v = f\ (vx) = -\ 10{,}5^2 + 21\ .\ 10{,}5 + 100 = -110{,}25 + 220{,}5 + 100 = 210{,}25$

La respuesta al problema es: 10 años y medio después de ser introducidos, la población era máxima. A partir de ese momento comenzó a disminuir. La cantidad máxima de ciervos que llegó a haber en la isla fue de 210 (debemos tomar la parte entera del número pues no podemos contar ciervos con números decimales).

Para averiguar en qué momento se extingue la población hay que hallar las raíces del polinomio utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando a, b y c por sus respectivos valores se obtiene

$x_1 = 25$ y $x_2 = -4$

Descartamos el resultado negativo pues nuestra función tiene como dominio los números positivos. La respuesta entonces es que los ciervos se extinguieron 25 años luego de ser introducidos en la isla.

ACTIVIDAD 49

:| Para escribir la forma factorizada primero hallamos todas las raíces del polinomio siguiendo los pasos que se indican en el Módulo y luego reemplazamos estos valores en la fórmula $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ donde a es el coeficiente principal y x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces halladas.

a :| $P(x) = 3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18$

Primero buscamos, tanteando, una raíz. Probamos de reemplazar **x** por distintos valores hasta encontrar uno que haga que la cuenta dé cero. Por ejemplo:

Si **x = 1** $P(1) = 3 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 21 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 18 = 0$

Ahora debemos dividir $P(x) = 3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18$ por $x - 1$

Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 3 & -3 & -21 & 3 & 18 & \longrightarrow \text{Coeficientes de P (x)} \\
 & & + & + & + & + & \\
\text{Raíz} = 1 & & 3 & 0 & -21 & -18 & \\
\hline
 & 3 & 0 & -21 & -18 & 0 & \longrightarrow \text{Resto}
\end{array}$$

$\underbrace{3 \quad 0 \quad -21 \quad -18}_{\text{Coeficientes del cociente}}$

Con lo cual podemos escribir :

$3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18 = (x - 1)\ (3x^3 - 21x - 18)$ (*):

Ahora debemos encontrar las raíces de: $(3x^3 - 21x - 18)$

Como se trata de un polinomio de tercer grado debemos encontrar otra raíz por tanteo. Por ejemplo:

Si $x = -1$ $\quad 3\ (-1)^3 - 21\ (-1) - 18 = 0$

Dividimos $3x^3 - 21x - 18$ por $x + 1$

	3	0	-21	-18
		+	+	+
-1		-3	3	18
	3	-3	-18	0

Reemplazando en (*):

$3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18 = (x - 1)\ (x + 1)\ (3x^2 - 3x - 18)$

Ahora debemos factorizar: $3x^2 - 3x - 18$

Como es un polinomio de grado 2 aplicamos la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{b - b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 3$, $b = -3$ y $c = -18$ y obtenemos:

$x_1 = -2$ y $x_2 = 3$

Reemplazando en la forma factorizada:

$P(x) = a\ (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)$,

La expresión del polinomio factorizado será:

$P(x) = 3\ (x - 1)(x + 1)\ (x + 2)\ (x - 3)$

b :| $Q(x) = 5x^4 - 125x^2 + 720$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso a) obtenemos la forma factorizada de $Q(x) = 5\ (x - 4)\ (x + 4)\ (x + 3)\ (x - 3)$

ACTIVIDAD 50

a :| La expresión que permite calcular el volumen es $V(x) = x(30 - 2x)^2$.

b :| $V(4) = 4(30 - 2 \cdot 4)^2 = 1936$

c :| $V(x) = x(30 - 2x)^2 = 1944$

$V(x) = x(30 - 2x)(30 - 2x) = 1.944$

Aplicando propiedad distributiva y agrupando:

$$4x^2 - 120x^2 + 900x - 1.944 = 0$$

Como se trata de un polinomio de grado 3 debemos encontrar una raíz por tanteo.

Probamos de reemplazar x por distintos valores hasta encontrar uno que haga que la cuenta dé cero. Por ejemplo:

Si $x = 6$

$$4 \cdot 6^3 - 120 \cdot 6^2 + 900 \cdot 6 - 1.944 = 864 - 4.320 + 5.400 - 1.944 = 0$$

Por lo tanto si el lado del cuadrado recortado es de 6 cm el volumen de la caja es de 1.944 cm^3.

Clave de corrección de la autoevaluación

EJERCICIO 1

Llamando x a las preguntas bien contestadas y que teniendo en cuenta que no contestó dos preguntas, las preguntas mal contestadas serán **18 – x**.

Para calcular el puntaje que obtiene por las preguntas bien contestadas debemos multiplicar x por 0,5 que es lo que vale cada pregunta.

Para calcular lo que le descontarán debemos multiplicar el total de preguntas mal contestadas, o sea **x – 18** por 0,5. Sumando los puntajes debemos obtener 4.

Por lo tanto, la ecuación que permite averiguar el total de preguntas bien contestadas será:

$$0{,}5x - 0{,}5\,(18 - x) = 4$$

Distribuyendo obtenemos:

$$0{,}5x - 9 + 0{,}5x = 4$$

Despejando:

$$0{,}5x + 0{,}5x = 4 + 9$$

$$x = 13$$

Respuesta: contestó bien 13 preguntas.

EJERCICIO 2

La inecuación que permite resolver el problema es:

$$9\,x + 6 \leq 100$$

$$9x \leq 100 - 6$$

$$9x \leq 94$$

$$x \leq 94 : 6$$

$$x \leq 15{,}6$$

Respuesta: puede encargar a lo sumo 15 resmas.

EJERCICIO 3

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 1{,}5x + 1{,}8y = 40{,}5 \\ x = y + 5 \end{cases}$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera obtenemos:

$$1{,}5\ (y + 5) + 1{,}8y = 40{,}5$$

Distribuyendo:

$$1{,}5y + 7{,}5 + 1{,}8y = 40{,}5$$

Despejando:

$$1{,}5y + 1{,}8y = 40{,}5 - 7{,}5$$

Agrupando:

$$3{,}3\ y = 33$$

$$y = 33 : 3{,}3$$

$$y = 10$$

Por lo tanto $x = y + 5 = 10 + 5 = 15$

Respuesta: compró 15 paquetes en oferta y 10 de los otros.

EJERCICIO 4

Para responder las dos primeras preguntas (a y b) debemos hallar el vértice de la parábola, donde x_v será el momento en el que alcanza la velocidad máxima e y_v será la velocidad máxima.

Utilizando las fórmulas correspondientes y reemplazando a por -1, b por 18 y c por 40 obtenemos:

$$x_v = -\ b/2a = -18/2\ (-1) = 9$$

Luego podemos responder al punto b diciendo que: **el misil alcanza su máxima velocidad 9 segundos después de haber sido lanzado**.

$$y_v = f\ (vx) = -\ 9^2 + 18 \cdot 9 + 40 = -\ 81 + 162 + 40 = 121$$

La respuesta al punto a es: la máxima velocidad alcanzada es de 121m/s.

c :| Para averiguar en qué momento se detiene el misil debemos calcular las raíces del polinomio utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{b - b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando a, b y c por sus respectivos valores se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 40}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 160}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{484}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_1 = \frac{-18 + 22}{-2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-18 - 22}{-2} = 20$$

$x_1 = -2$ y $x_2 = 20$

El momento en el cual el misil fue lanzado corresponde a tiempo cero, por lo tanto debemos descartar el valor negativo.

Luego, la respuesta al punto c **es**: **el misil se detiene a los 20 segundos.**

d :| Para responder este punto debemos reemplazar **v** por 100 y resolver la ecuación:

$$100 = -t^2 + 18t + 40$$

Despejando:

$$0 = -t^2 + 18t + 40 - 100$$

$$0 = -t^2 + 18t - 60$$

Utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{b - b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde **a = -1, b = 18** y **c = - 60** se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-60)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 240}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{84}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_1 = \frac{-18 + 9{,}16}{-2} = 4{,}42$$

$$x_2 = \frac{-18 - 9{,}16}{-2} = 13{,}58$$

$x_1 = 4{,}42$ y $x_2 = 13{,}58$

Respuesta: el misil tendrá una velocidad de 100m/s a los 4,42 s y a los 13,58s.

e :| Teniendo en cuenta que la velocidad máxima es de 121m/s podemos decir que: **el misil nunca alcanzará una velocidad de 150 m/s.**

EJERCICIO **5**

a :| Para responder este punto debemos reemplazar **t** por **5** y hacer el cálculo:

$$\begin{aligned} T(5) &= 0{,}2 \cdot 5^3 - 5{,}6 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 \\ &= 0{,}2 \cdot 125 - 5{,}6 \cdot 25 + 36 \cdot 5 \\ &= 25 - 140 + 180 \\ &= 65 \end{aligned}$$

Para responder los puntos b y c debemos calcular las raíces del polinomio:

$$T(t) = 0{,}2\, t^3 - 5{,}6t^2 + 36t.$$

Para ello igualamos el polinomio a cero y resolvemos la ecuación:

$$0 = 0{,}2t^3 - 5{,}6t^2 + 36t.$$

Sacando factor común t:

$$0 = t\,(0{,}2\, t^2 - 5{,}6t + 36)$$

Para que este producto sea cero, o **t** debe valer cero o el paréntesis debe valer cero, por lo tanto igualamos a cero el paréntesis y resolvemos la ecuación:

$$0 = 0{,}2t^2 - 5{,}6t + 36$$

Para ello aplicamos la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{b - b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 0{,}2$, $b = -5{,}6$ y $c = 36$.

$$x_{1,2} = \frac{-5{,}6 \pm \sqrt{5{,}6^2 - 4 \cdot 0{,}2 \cdot 36}}{2 \cdot 0{,}2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5{,}6 \pm \sqrt{31{,}36 - 28{,}8}}{2 \cdot 0{,}2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5{,}6 \pm \sqrt{2{,}56}}{2 \cdot 0{,}2}$$

$$x_1 = \frac{-5{,}6 + 1{,}6}{0{,}4} = 18$$

$$x_2 = \frac{-5{,}6 - 1{,}6}{0{,}4} = 10$$

$$x_1 = 18 \text{ y } x_2 = 10$$

Las raíces de la función son $t = 0$, $t = 10$ y $t = 18$.

b :| Como la primera medición se realizó a las 8 de la mañana y ese momento corresponde a $t = 0$ podemos decir que la temperatura fue de 0 ºC a las 8 de la mañana, 10 horas después de la 8, o sea a las 6 de la tarde y 18 horas después de las 8, o sea a las 2 de la mañana del día siguiente.

c :| Teniendo en cuenta que las raíces de la función son $t = 0$, $t = 10$ y $t = 18$ y que las raíces son los puntos donde la función corta al eje x, si a las 5 horas de haber realizado la primera medición la temperatura era positiva, entre las 10 y las 18 horas de haber comenzado las mediciones, la temperatura será bajo cero.

Bibliografía

A continuación le proponemos algunos textos para consultar que, seguramente le serán útiles a lo largo de su trabajo con el Módulo. Recurra a su docente tutor o al bibliotecario de la escuela o de la biblioteca más cercana para que lo ayude en la búsqueda del material que le interese.

•] Altman, S, Comparatore, C y Kurzrok, L.. *Matemática Polimodal. Funciones 1*, Argentina, Longseller, 2002.

•] Altman, S, Comparatore, C y Kurzrok, L.. *Matemática Polimodal. Funciones 2*, Argentina, Longseller, 2002.

•] Camus, N. y Massara, L.. *Matemática 3*, Argentina, AIQUE, 1994.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación

EQUIPO DE EDUCACIÓN DE JÓVENES Y ADULTOS

RESPONSABLE DE LA ARTICULACIÓN DEL PROYECTO | Mirta Leon
LECTURA DE LOS MATERIALES | Pablo Courreges
Herminia Ferrata
Mirta Leon
Esther Levy
Gabriela Miasnik
Heliana Rodríguez
José Romero
Alejandra Santos

EQUIPO DE PRODUCCIÓN EDITORIAL -DNPC-

COORDINACIÓN GENERAL | Laura Gonzalez
SUB COORDINACIÓN | Verónica Gonzalez
ASISTENCIA DE PRODUCCIÓN | Silvia Corral
DISEÑO DE COLECCIÓN | Clara Batista

Matemática - Iniciación al Álgebra

COORDINACIÓN | Silvia Corral
ARMADO | Hernán Corral
GRÁFICOS | María Pingray

El presente material fue elaborado por los Equipos
Técnicos de la Dirección de Educación de Adultos y Formación Profesional
de la Dirección General de Cultura y Educación
de la Provincia de Buenos Aires.

El Ministerio de Trabajo, Empleo y Seguridad Social
brindó apoyo financiero para la elaboración de este material
en el marco del Convenio Más y Mejor Trabajo
celebrado con el Gobierno de la Provincia de Buenos Aires.

Dirección de Educación de Adultos y
Formación Profesional de la Provincia de Buenos Aires

EQUIPO DE PRODUCCIÓN PEDAGÓGICA

COORDINACIÓN GENERAL	Gerardo Bacalini
COORDINACIÓN DEL PROYECTO	Marta Ester Fierro
COORDINACIÓN DE PRODUCCIÓN DE MATERIALES	Beatriz Alen
AUTORA	Guillermina Meana
PROCESAMIENTO DIDÁCTICO	Alicia Santana
ASISTENCIA DE PRODUCCIÓN	Florencia Sgandurra
CORRECCIÓN DE ESTILO	Carmen Gargiulo
GESTIÓN	María Teresa Lozada
	Cecilia Chavez
	Marta Mannesse
	Juan Carlos Manukian

Se agradece la colaboración de los docentes y directivos
de los Centros Educativos de Nivel Secundario de la provincia de Buenos Aires
que revisaron y realizaron aportes a las versiones preliminares de los materiales.

Material de distribución gratuita

MINISTERIO de EDUCACIÓN CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

OEI
Organización de Estados Iberoamericanos
Para la Educación, la Ciencia y la Cultura