Matemática

Iniciación al Álgebra

NIVEL SECUNDARIO PARA ADULTOS

Módulos de Enseñanza Semipresencial

MINISTERIO de EDUCACIÓN
CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

Matemática

Iniciación al Álgebra

NIVEL SECUNDARIO PARA ADULTOS

Módulos de Enseñanza Semipresencial

MINISTERIO de EDUCACIÓN CIENCIA y TECNOLOGÍA
PRESIDENCIA de la NACIÓN

PRESIDENTE DE LA NACIÓN
Dr. Néstor Kirchner

MINISTRO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Lic. Daniel Filmus

SECRETARIO DE EDUCACIÓN
Lic. Juan Carlos Tedesco

SUBSECRETARIA DE EQUIDAD Y CALIDAD
Lic. Alejandra Birgin

DIRECTORA NACIONAL DE GESTIÓN CURRICULAR Y FORMACIÓN DOCENTE
Lic. Laura Pitman

DIRECTORA NACIONAL DE PROGRAMAS COMPENSATORIOS
Lic. María Eugenia Bernal

COORDINADOR DE EDUCACIÓN DE JÓVENES Y ADULTOS
Prof. Manuel Luis Gómez

GOBERNADOR DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES
Ing. Felipe Solá

DIRECTORA GENERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Dra. Adriana Puiggrós

SUBSECRETARIO DE EDUCACIÓN
Ing. Eduardo Dillon

DIRECTOR DE EDUCACIÓN DE ADULTOS Y FORMACIÓN PROFESIONAL
Prof. Gerardo Bacalini

SUBDIRECTORA DE EDUCACIÓN DE ADULTOS
Prof. Marta Ester Fierro

SUBDIRECTOR DE FORMACIÓN PROFESIONAL
Prof. Edgardo Barceló

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de la Nación.
Nivel secundario para adultos, módulos de enseñanza semi presencial : matemática, iniciación al álgebra. - 1a ed. - Buenos Aires : Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, 2007.
134 p. il. ; 30x21 cm.

ISBN 978-950-00-0621-7

1. Educación para Adultos. 2. Matemática. 3. Álgebra. I. Título
CDD 374

ÍNDICE

Introducción 5

Objetivos 5

Esquema de contenidos 6

Unidad 1: Lenguajes matemáticos 7

Introducción 8

Ampliación del campo numérico 9

Lenguaje algebraico 14

Operaciones con expresiones algebraicas 15

Suma y resta 16

Multiplicación 17

Las expresiones algebraicas como herramienta para resolver problemas 18

Ecuaciones 18

Resolución de ecuaciones 21

Otros usos de las expresiones algebraicas 27

Las expresiones algebraicas como herramienta para demostrar propiedades matemáticas 27

Las expresiones algebraicas como herramienta para hacer generalizaciones 29

ÍNDICE

Inecuaciones 31

Resolución de inecuaciones 35

Unidad 2: Ecuaciones 41

Sistemas de ecuaciones lineales 47

Métodos analíticos de resolución de sistemas de ecuaciones 50

Clasificación de los sistemas de ecuaciones 54

Sistemas con más de dos ecuaciones 58

Unidad 3: Polinomios 63

Operaciones con polinomios 73

Funciones polinómicas 81

- Funciones polinómicas de segundo grado: funciones cuadráticas 81
- Funciones polinómicas de grado mayor que 2 96

Autoevaluación 101

Clave de corrección 103

Clave de corrección de la autoevaluación 125

Bibliografía 131

Introducción

El lenguaje matemático constituye una de las formas de comunicación, expresión y comprensión más poderosas que ha inventado el hombre. El lenguaje matemático comprende: el lenguaje coloquial, el aritmético, el geométrico y el algebraico o simbólico. Usted ya ha trabajado con algunos de estos lenguajes en algunos Módulos anteriores y en la vida cotidiana. En éste le proponemos profundizar el trabajo con lenguaje algebraico, lo que le permitirá abordar la resolución de una serie de problemas para los cuales los otros lenguajes resultan insuficientes o de difícil aplicación.

Para ello le proponemos una serie de problemas para que usted resuelva primero con los conocimientos que ya tiene y luego nosotros le formularemos otras formas de resolución que irán ampliando sus posibilidades y le brindarán nuevas herramientas de trabajo. También le planteamos una serie de actividades para que tenga ocasión de aplicar estas nuevas estrategias a otras situaciones.

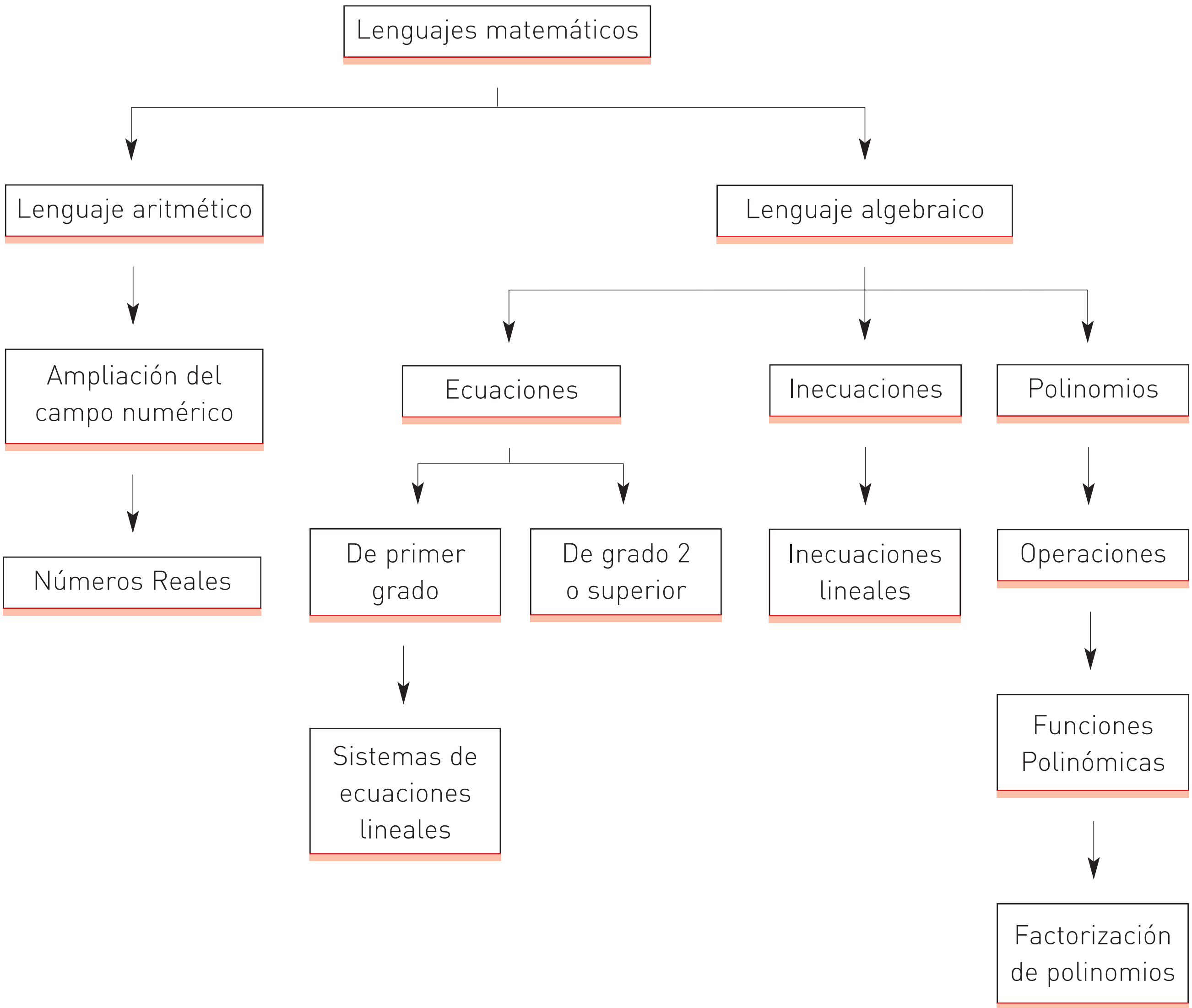
No olvide que se aprende matemática resolviendo problemas. Resolver problemas es una actividad que en un comienzo puede no ser sencilla, requiere esfuerzo y perseverancia. No se desaliente si en algunos casos le resultan difíciles. A medida que vaya avanzando irá ganando experiencia y confianza.

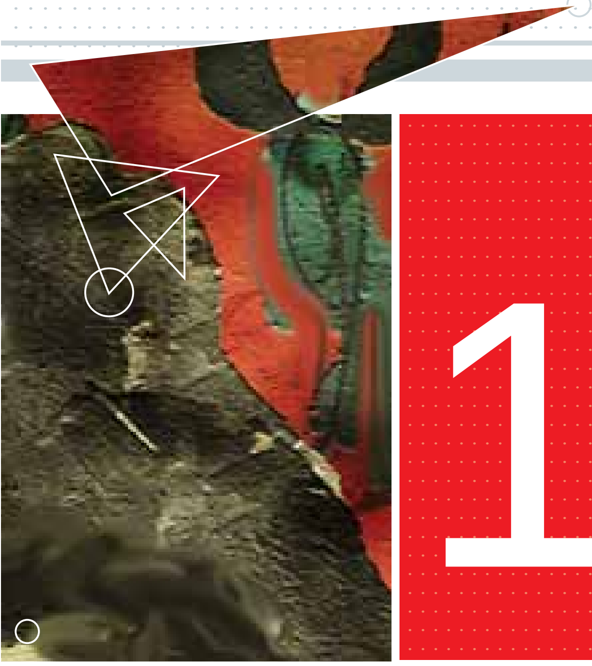
Objetivos

Esperamos que una vez que haya realizado la experiencia propuesta en este Módulo usted logre:

- Identificar aquellas situaciones donde el álgebra aparece como una herramienta más potente que la aritmética.
- Demostrar propiedades matemáticas utilizando el lenguaje algebraico.
- Utilizar el álgebra para realizar generalizaciones.
- Resolver problemas mediante el planteo y resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
- Relacionar los conceptos de función y polinomio.
- Resolver algebraicamente problemas que respondan a un modelo de funciones lineales y cuadráticas.

Esquema de contenidos





1 UNIDAD
Lenguajes matemáticos

Introducción

Así como en nuestra vida cotidiana utilizamos distintos medios para comunicarnos: el lenguaje hablado y escrito, en sus diferentes idiomas, el lenguaje simbólico y el lenguaje de los códigos, también en Matemática se utilizan distintos lenguajes.

Acerca de los distintos lenguajes matemáticos, su importancia y sus diferentes usos usted puede encontrar información en el Libro 5. También se trabajó con lenguaje simbólico en los Libros 3 y 4. Si usted no tiene estos libros puede solicitárselos a su tutor. En el Módulo 1 hemos utilizado el lenguaje gráfico y simbólico para trabajar con funciones. En este Módulo profundizaremos el trabajo con lenguaje simbólico o algebraico. Veremos cómo el lenguaje algebraico es una herramienta útil para resolver problemas y cómo puede utilizarse para demostrar propiedades matemáticas y hacer generalizaciones.

Recordemos algunos de los lenguajes utilizados en Matemática:

El **lenguaje coloquial**, formado por las palabras que utilizamos para conversar. Por ejemplo:

- "El triple de un número es igual a diez".
- "L a edad de Juan supera en dos años a la de Pablo".
- "El costo de vida ha aumentado un 2%".

El **lenguaje simbólico o algebraico**, formado por los símbolos específicos de la Matemática. Las expresiones anteriores traducidas al lenguaje simbólico serían:

- " $3 n = 10$"
- "$J = P + 2$"
- "$C = c + 0,02 c$"

El **lenguaje gráfico**, utilizado para brindar mucha información en poco espacio. Por ejemplo:

- "gráficos circulares"
- "gráficos de barras"
- "representaciones en ejes cartesianos"

Ampliación del campo numérico

Antes de comenzar a trabajar con diferentes lenguajes matemáticos haremos una breve revisión de los diferentes conjuntos numéricos.

En los Libros y Módulos anteriores usted ya trabajó con distintos tipos de números y estudió sus propiedades. **En este Módulo trabajaremos con diferentes conjuntos numéricos, realizando operaciones y utilizando sus propiedades.**

Si lo considera necesario puede consultar el Libro 3 (página 33) y subsiguientes. Si no los tiene puede solicitárselos a su tutor. Allí encontrará más ejemplos y un detalle de las propiedades de cada conjunto numérico.

Veamos ahora, a modo de revisión, cuáles son esos conjuntos numéricos y cuáles sus usos más frecuentes.

Los primeros números con los que usted ha trabajado son los que se utilizan para contar:

1, 2, 3, 4, ...

Se los llama **números naturales** o **enteros positivos**. Al conjunto de tales números se lo designa con la letra N.

ACTIVIDAD 1

a :| ¿En qué situaciones de la vida cotidiana utiliza usted los números naturales? Escriba algunos ejemplos.

b :| ¿Qué operaciones puede realizar con números naturales de forma tal que el resultado sea siempre un número natural? Anote algunos ejemplos.

c :| ¿Qué operaciones con números naturales no siempre dan un número natural?

Escriba algunos ejemplos.

Encontrará algunos ejemplos en la Clave de corrección que figura al final del Módulo.

Vemos que ciertas operaciones entre números naturales no siempre dan como resultado otro número natural. Por ejemplo si restamos 5 – 8 el resultado no es un número natural. Es necesario entonces recurrir a otro conjunto más amplio, el de los números enteros.

Los números –1, -2, -3, -4, ..., se llaman **enteros negativos**. El número 0 no es positivo ni negativo. Los enteros positivos, los enteros negativos y el cero forman el conjunto de los **números enteros**; a este conjunto se lo designa con la letra Z (del alemán *Zahl*, que significa número).

ACTIVIDAD **2**

a :| ¿En qué situaciones de la vida cotidiana utiliza usted los números negativos? Escriba algunos ejemplos.

b :| ¿Qué operaciones puede realizar con números enteros de forma tal que el resultado sea siempre un número entero? Anote algunos ejemplos.

c :| ¿Qué operaciones con números enteros no siempre dan un número entero? No olvide tener en cuenta la potenciación y radicación. Escriba algunos ejemplos.

Encontrará algunos ejemplos en la clave de corrección que figura al final del Módulo.

Vemos que también hay operaciones entre números enteros que no siempre dan un número entero. Por ejemplo si dividimos 1 : 2 el resultado no es un número entero. Es necesario entonces recurrir a otro conjunto más amplio aún, el de los **números racionales**.

En este conjunto se encuentran todos aquellos números que pueden expresarse como una fracción, es decir como un cociente entre números enteros $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros, y es distinto de cero. Al conjunto de tales números se lo designa con la letra Q (del inglés *Quotient*, que significa cociente). Dentro del conjunto de los números racionales se encuentran también los números enteros pues pueden escribirse como una fracción de denominador 1. Sin embargo, por una cuestión de comodidad, el denominador 1 no se escribe.

Algunos ejemplos de números racionales son: $\frac{1}{2}$; $-\frac{13}{9}$; $\frac{61}{137}$; 2; - 3; 0 ; 5/4; 3/8

Los números racionales pueden expresarse también como decimales.

¿Recuerda usted cómo encontrar la expresión decimal de una fracción?

Una forma es realizar la división entre numerador y denominador de la fracción.

ACTIVIDAD **3**

:| Escriba las expresiones decimales de los ejemplos anteriores.

Habrá notado que algunas de las expresiones decimales anteriores tienen una cantidad finita de cifras decimales y otras, en cambio, tienen una cantidad infinita de cifras decimales pero que en algún momento comienzan a repetirse siguiendo un orden. A estos últimos los llamamos números periódicos.

ACTIVIDAD 4

a :| ¿En qué situaciones de la vida cotidiana utiliza los números racionales que no son enteros? Escriba algunos ejemplos.

b :| ¿Qué operaciones puede realizar con números racionales de forma tal que el resultado sea siempre un número racional? Anote algunos ejemplos.

c :| ¿Qué operaciones con números racionales no siempre dan un número racional? Escriba algunos ejemplos.

Encontrará otros ejemplos en la clave de corrección que figura al final del Módulo.

Existen otros números que no pueden expresarse como fracción. Son aquellos que tienen infinitas cifras decimales que no se repiten en ningún orden.

Estos números forman parte del conjunto de los **números irracionales**.

Algunos ejemplos de números irracionales son el número $\sqrt{2}$ = 1,414213562... o el número π = 3,141592654... y otros que podemos inventar como 0,12233... ó 0,24681012.....

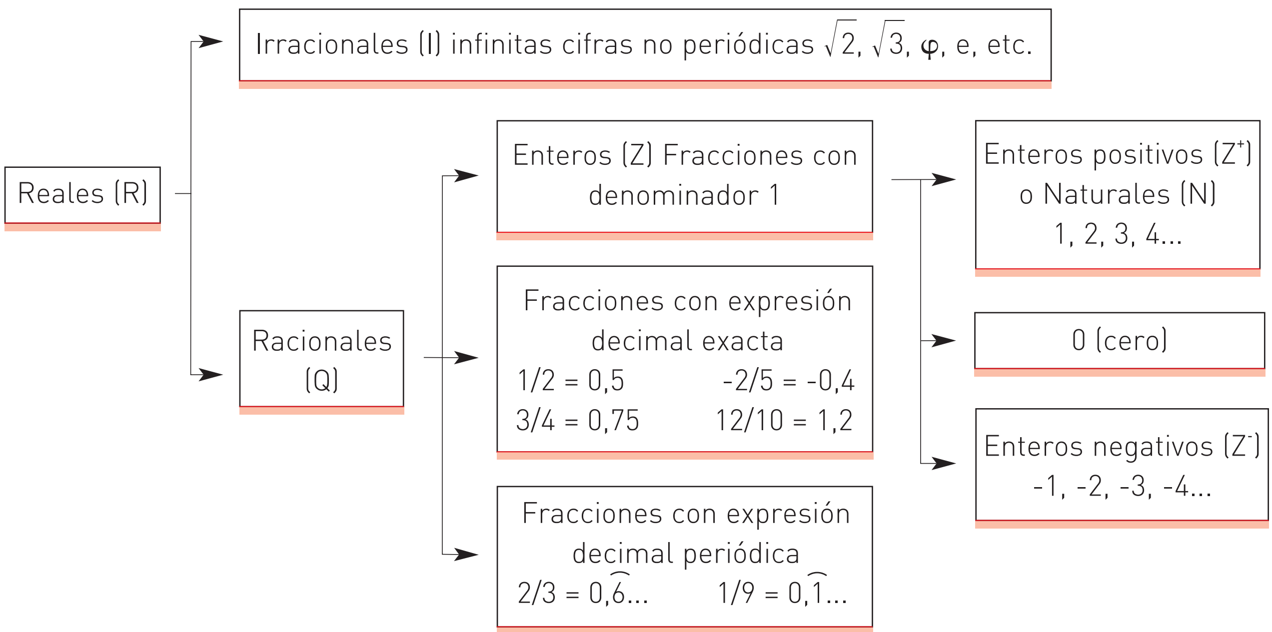
:| Cree usted algún otro. Escríbalo y consulte luego con su tutor.

ACTIVIDAD 5

:| Escriba algunas situaciones en las que se usen los números irracionales.

Los números racionales y los números irracionales forman un nuevo conjunto, llamado conjunto de los **números reales**, y al que se designa con la letra R.

Podemos resumir la información anterior en el siguiente esquema:



Ahora comenzaremos a trabajar con diferentes lenguajes matemáticos. Tenga presente que al resolver problemas es muy importante tener en cuenta con qué conjunto numérico se está trabajando para poder dar la respuesta adecuada.

Problema 1

Pedro, Juan y Luis son hermanos. Tienen entre los tres ahorrados $63. Juan tiene un peso más que Pedro y uno menos que Luis. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado cada uno?

:| Antes de proseguir con la lectura intente resolver el problema.

:| Ahora compare su resolución con las que le proponemos a continuación.

Una posible resolución sería:

Si todos tuvieran ahorrada la misma cantidad podríamos dividir 63 entre 3 y obtendríamos 21. Pero como Juan tiene un peso más que Pedro y uno menos que Luis, Pedro tiene 20 y Luis 22.

Más adelante veremos otras formas de resolución.

Problema 2

Marcela, María y Marta son hermanas. Tienen ahorrado entre las tres $102. María tiene $15 menos que Marcela y $12 más que Marta. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado cada una?

:| Intente resolverlo y luego compare su resolución con la que proponemos a continuación. Más adelante veremos otras formas de resolución.

Para resolver este problema podemos comenzar como en el caso anterior. Dividimos $102 entre 3. Obtenemos $34. Supongamos que María tiene $34. Ella tiene $15 menos que Marcela, por lo tanto Marcela tendrá $49. Además María tiene $12 más que Marta. Eso significa que Marta tiene $22. Si ahora sumamos lo que tienen entre las tres: $49 + 34 + 22 = 105$ nos sobran $3. Descontando $1 a cada una llegamos a la siguiente respuesta: Marcela tiene $48, María $33 y Marta $21.

Nótese, que si bien este problema tiene una estructura similar a la del problema anterior, las relaciones que se establecen hacen que su resolución sea un poco más complicada.

:| ¿Y si los números involucrados fueran decimales? Intente resolver el mismo problema pero suponiendo que entre las tres tienen 103,75 y que María tiene $15,45 menos que Marcela y $13,65 más que Marta.

Problema 3

Esteban participó en un programa de televisión. El juego consistía en responder 50 preguntas. Por cada pregunta bien contestada el participante ganaba $25 pero le descontaban $15 por cada pregunta mal contestada. Esteban ganó $370. ¿Cuántas preguntas contestó bien?

:| Primero intente resolver el problema y luego compare su resolución con la que nosotros le proponemos. Más adelante también propondremos otros caminos de resolución.

Una forma de resolver este problema podría ser analizando posibles situaciones particulares. Si multiplico la cantidad de respuestas correctas por 25 y le resto el total de respuestas incorrectas por 15 debo obtener 370. Para organizar la información podríamos construir una tabla como la siguiente:

Cantidad de respuestas correctas	Importe	Cantidad de respuestas incorrectas	Importe	Total
1	25	49	735	-710
2	50	48	720	-670
3	75	47	705	-630
....				
20	500	30	450	50
21	525	29	435	90
....				
28	**700**	**22**	**330**	**370**
....				
50	1.250	0	0	1.250

Nótese que aquí probamos sólo con algunos valores hasta encontrar la solución. Por otra parte las preguntas eran 50. ¿Qué hubiera sucedido con 100 preguntas o más?

Conclusión

*Teniendo en cuenta las relaciones establecidas entre los datos de un problema, muchas veces la resolución aritmética se torna difícil, o muy tediosa o incluso imposible. Cuando esto sucede, los matemáticos disponen de otro recurso para resolverlos: el **álgebra**. Mediante el planteo y resolución de **ecuaciones** es posible resolver de forma sencilla muchos de los problemas cuya resolución aritmética no lo es.*

Pero para ello hay que traducir el enunciado del problema al lenguaje algebraico y disponer de los conocimientos adecuados para trabajar con las ecuaciones que resultan planteadas.

Lenguaje algebraico

A las expresiones en las que se indican operaciones entre números y letras se las llama **expresiones algebraicas**. Las letras reciben el nombre de **variables** y pueden ser reemplazadas por distintos números.
Son expresiones algebraicas, por ejemplo:

a | $3b + 2c + 4d$

b | $x^2 = 9$

c | $5x$

d | $a^2 + b^2$

e | $2^x = 8$

f | $2 (x + 1) = 4 x$

g | $3 x + 2 y = 5$

h | $S = b \cdot h/2$

i | $4 = x + 1$

j | $a + 1 = a + 2$

k | $2b = b + b$

Usted ya trabajó con lenguaje simbólico o algebraico en el Módulo de Matemática - Funciones. Además puede encontrar ejemplos en el Libro 5. Si no lo tiene puede solicitárselo a su tutor. En este Módulo profundizaremos ese trabajo.

ACTIVIDAD 6

:| Escriba la expresión algebraica que representa a cada uno de los siguientes enunciados.

a :| El doble de un número a.

b :| La tercera parte de un número c.

c :| El cuadrado de un número x.

d :| El anterior del cuadrado de un número n.

ACTIVIDAD 6
[continuación]

e :| El cuadrado del siguiente de un número **d**.

f :| El producto de un número **a** por su siguiente.

g :| La diferencia entre un número **c** y su consecutivo.

ACTIVIDAD 7

:| La edad de Pedro supera en 6 años a la edad de Martín. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones traducen esta situación? (**p** representa la edad de Pedro y **m** la de Martín).

a :| $m = p + 6$	d :| $p = m + 6$
b :| $m = p \cdot 6$	e :| $p - m = 6$
c :| $p - 6 = m$	f :| $m - p = 6$

ACTIVIDAD 8

:| Escriba en lenguaje coloquial cada una de las expresiones algebraicas presentadas como ejemplo.

ACTIVIDAD 9

:| Una cada una de las afirmaciones siguientes con su correspondiente expresión algebraica.

a :| El cuadrado de la suma de dos números **a** y **b**:	$a^3 - b^3$
b :| El triple del anterior de un número **c**:	$3c - 1$
c :| El cuadrado de un número **a** disminuido en **b** unidades:	$(a - b)^3$
d :| El anterior del triple de un número **c**:	$(a + b)^2$
e :| La diferencia entre los cubos de dos números **a** y **b**:	$3\ (c - 1)$
f :| El cubo de la diferencia de dos números **a** y **b**:	$a^2 - b$

Operaciones con expresiones algebraicas

Cada término de una expresión algebraica está formado por una parte numérica y una parte literal. Por ejemplo: en la expresión $5a^2$, **5** es la parte numérica y a^2 es la parte literal.

Se llaman términos semejantes a los que tienen la misma parte literal. Por ejemplo: **5b** es semejante a **2b**, $3x^2$ es semejante a $2x^2$, **4ab** es semejante a **6ab**.

Suma y resta

Al sumar y restar expresiones algebraicas sólo se pueden sumar o restar los términos semejantes.

Por ejemplo:

$3b + 2b = 5b$

$2a + 3b - b + 4a = 6a + 2b$ (esta expresión no puede reducirse más pues $6a$ no es semejante a $2b$).

La suma y la resta de expresiones algebraicas cumplen con las mismas propiedades que la suma y resta de números.

Por ejemplo:

Propiedad conmutativa

$3b + 2b = 2b + 3b = 5b$

El orden en que se realiza la suma no altera el resultado.

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y la resta

$3\,(a + 2b) = 3a + 6b$

Si tenemos que multiplicar un número por la suma de otros dos, podemos multiplicar primero cada uno de los números y luego sumar.

ACTIVIDAD 10

:| Realice las siguientes operaciones. Indique, en cada caso, las propiedades utilizadas.

a :| $2a - 3b + 4\,(a - b) =$

b :| $2ab + 3\,(a - b) + 4b - 5ab =$

c :| $x + x^2 - 3x + 4x^2 =$

d :| $x + 2y - (x + y) =$

Multiplicación

Al multiplicar expresiones algebraicas se multiplican las partes numéricas y en las partes literales se aplica la propiedad del producto de potencias de igual base.

Producto de potencias de igual base

$$a^1 \cdot a^2 = \underbrace{a}_{a^1} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{a^2} = a^3$$

$$a \cdot a^2 \cdot a^5 = a^{1+2+5} = a^8$$

Exponentes

Base

Cuando se multiplican potencias de igual base, se obtiene una potencia con la misma base y cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes dados.

Ejemplos:

$$3 \cdot 2x \cdot 4x^2 = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot x^{1+2} = 24x^3$$

$$2a^2 \cdot 3b^3 \cdot 4ab = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^{2+1} \cdot b^{3+1} = 24a^3\, b^4$$

ACTIVIDAD 11

:| Realice las siguientes operaciones:

a :| $3b \cdot 4a^4 \cdot 5ab^2 =$

b :| $4x \cdot 2x^2 =$

c :| $5xy \cdot 4x^2y =$

d :| $-3a \cdot 2ab \cdot (-3b^2) =$

ACTIVIDAD 12

:| Realice las siguientes operaciones combinadas:

a :| $x + 2x =$

b :| $x \cdot 2x =$

c :| $x \cdot x \cdot x \cdot x + 2x^2 \cdot X^2 + 5x \cdot x^3 =$

d :| $b + 2\, b + b^2$

e :| $4x\,(2 - 3x + x) =$

Las expresiones algebraicas como herramienta para resolver problemas

Ecuaciones

Las **ecuaciones** son expresiones algebraicas que contienen una igualdad. Pueden contener una o más variables. Cada letra distinta indica una variable.

Algunos ejemplos de ecuaciones son:

1 | $x^2 = 9$

2 | $2^x = 8$

3 | $2(x + 1) = 4x$

4 | $3x + 2y = 5$

5 | $S = b \cdot h/2$

6 | $4 = x + 1$

7 | $a + 1 = a + 2$

8 | $2b = b + b$

9 | $x = 3$

Encontrará más ejemplos de ecuaciones en el Libro 5, pág. 72. Si no lo tiene puede solicitárselo a su tutor.

Los ejemplos 1, 2, 3, 6, 7, 8 y 9 corresponden a ecuaciones con una variable, la **x**. El ejemplo 4 corresponde a una ecuación con dos variables, **x** e **y**. El ejemplo 5 corresponde a una ecuación con tres variables, **S**, **b** y **h**.

Según el valor que le demos a las variables la igualdad será verdadera o falsa.

Por ejemplo:

La **ecuación 1** será verdadera si **x** vale 3 o –3 y será falsa para cualquier otro valor pues $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$ pero cualquier otro número al cuadrado no da 9. Por ejemplo $5^2 \neq 9$.

Decimos entonces que 3 y –3 son las soluciones de la ecuación 1.

La **ecuación 4** tiene dos variables. En este caso habrá pares de valores que verifiquen la igualdad. Por ejemplo: si $x = 1$ e $y = 1$ la igualdad es verdadera. Lo mismo sucede si $x = 2$ e $y = -½$. En cambio si $x = 4$ e $y = 2$ la igualdad es falsa. Por lo tanto existen infinitos pares (x, y) que hacen verdadera la igualdad. Decimos que esta ecuación tiene infinitas soluciones.

La **ecuación 5** es una ecuación con tres variables. Por lo tanto existirán ternas de valores que hagan verdadera la igualdad. Por ejemplo: $S = 6$, $b = 3$, $h = 4$.

Esta ecuación tendrá infinitas soluciones. Cada una será una terna (S, b, h).

En la **ecuación 7** la igualdad es falsa para cualquier valor de **a**. Si a un número le sumamos 1 nunca va a dar el mismo resultado que si le sumamos 2. Se trata de una ecuación que no tiene solución.

En la **ecuación 8**, en cambio, cualquier valor de b hace verdadera la igualdad. Todos los números reales son solución de esta ecuación. Decimos que la ecuación tiene infinitas soluciones. Este tipo de ecuaciones recibe el nombre de identidades.

Las ecuaciones 2, **6** y **9** tienen una sola solución. En todas ellas la igualdad es verdadera si **x** vale 3 y falsa para cualquier otro valor de **x**.

El conjunto de todos los valores que pueden tomar las variables de modo tal que la igualdad resulte verdadera recibe el nombre de **conjunto solución.**

En el caso de la **ecuación 1** decimos que el conjunto solución está formado por los números 3 y –3.

Lo simbolizamos $S = \{3; -3\}$

Resolver una ecuación significa hallar su conjunto solución. Dependiendo de la cantidad de variables y de la forma de la ecuación existen diferentes métodos para resolverlas, que veremos más adelante.

Las ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución se llaman **ecuaciones equivalentes.**

Por ejemplo: las **ecuaciones 2**, **6** y **9** son equivalentes. En todas ellas la igualdad resulta verdadera si **x** vale 3. O sea, todas tienen el mismo conjunto solución, que simbolizamos $S = \{3\}$

Podemos resumir la información anterior en el siguiente cuadro:

Ecuación	Cantidad de variables	Cantidad de soluciones	Conjunto solución	Se lee
$X^2 = 9$	1	2	$S = \{3; -3\}$	El conjunto solución está formado por los números **3** y **-3**.
$2^x = 8$	1	1	$S = \{3\}$	El conjunto solución está formado por el número **3**.
$2(x + 1) = 4x$	1	1	$S = \{1\}$	El conjunto solución está formado por el número **1**.
$3x + 2y = 5$	2	Infinitas Por ejemplo: (1; 1) (2; 1/2)	$S = (x, y) \in R$	El conjunto solución está formado por todos los pares **(x, y)** que verifican la igualdad.
$S = b \cdot h/2$	3	Infinitas Por ejemplo: (6, 3, 4) (16, 4, 8)	$S = (S, b, h) \in R$	El conjunto solución está formado por todas las ternas de números reales que verifican la igualdad.
$4 = x + 1$	1	1	$S = \{3\}$	El conjunto solución está formado por el número **3**.
$a + 1 = a + 2$	1	Ninguna	$S = \varnothing$	El conjunto solución es vacío.
$2b = b + b$	1	Infinitas	$S = R$	El conjunto solución está formado por todos los números reales.
$x = 3$	1	1	$S = \{3\}$	El conjunto solución está formado por el número **3**.

ACTIVIDAD 13

:| Escriba una ecuación que:

a :| Tenga una sola solución.

b :| Tenga dos soluciones.

c :| No tenga solución.

d :| Sea equivalente a $3x - 2 = 10$

e :| Cuyo conjunto solución sea $S = \{4\}$

En la Clave de corrección encontrará algunas posibles soluciones.

Resolución de ecuaciones

En este Módulo trabajaremos la resolución de ecuaciones y su utilidad como herramienta para resolver problemas. Para comenzar le proponemos que resuelva la siguiente Actividad.

ACTIVIDAD 14

:| Plantee en forma de ecuación los problemas 1, 2 y 3 propuestos al comienzo.

:| Compare las expresiones que planteó con las que proponemos a continuación.

En el problema 1 se pide hallar la cantidad de dinero que tiene cada uno de los hermanos. De acuerdo a quién se tome como referencia podemos plantear tres ecuaciones diferentes:

a | Si llamamos x al dinero que tiene Pedro:

Pedro: x

Juan: $x + 1$

Luis: $x + 1 + 1$

La ecuación que resulta es: $x + x + 1 + x + 1 + 1 = 63$

b | Si llamamos x al dinero que tiene Juan:

Pedro: $x - 1$

Juan: x

Luis: $x + 1$

La ecuación que resulta es: $x - 1 + x + x + 1 = 63$

c | Si llamamos **x** al dinero que tiene Luis:

Pedro: $x - 1 - 1$

Juan: $x - 1$

Luis: x

La ecuación que resulta es: $x - 1 - 1 + x - 1 + x = 63$

En el caso del problema 2 también pueden plantearse tres ecuaciones diferentes según a quién se tome como referencia.

a | Si llamamos **x** al dinero que tiene Marcela:

Marcela: x

María: $x - 15$

Marta: $x - 15 - 12$

La ecuación que resulta es: $x + x - 15 + x - 15 - 12 = 102$

b | Si llamamos **x** al dinero que tiene María:

Marcela: $x + 15$

María: x

Marta: $x - 12$

La ecuación que resulta es: $x + x + 15 + x - 12 = 102$

c | Si llamamos **x** al dinero que tiene Marta:

Marcela: $x + 12 + 15$

María: $x + 12$

Marta: x

La ecuación que resulta es: $x + 12 + 15 + x + 12 + x = 102$

En el problema 3 debemos averiguar la cantidad de respuestas correctas. Por lo tanto llamaremos **x** a la cantidad de respuestas correctas. La cantidad de respuestas incorrectas es $50 - x$. Además por cada respuesta correcta se pagaron \$25 y por cada incorrecta se restaron \$15 con lo cual la cantidad total de respuestas correctas debe multiplicarse por 25 y el total de incorrectas por 15.

Por lo tanto, la ecuación que resulta es: $25x - 15(50 - x) = 370$

ACTIVIDAD 15

:| Resuelva las ecuaciones planteadas en la Actividad 14.

Para ello tenga en cuenta lo que ha leído sobre operaciones con expresiones algebraicas. Si le resulta difícil puede encontrar ejemplos en el Libro 5, pág. 76. Si usted no tiene este libro puede solicitárselo a su tutor.

:| Compare su resolución de las ecuaciones con las que nosotros le proponemos.

Dijimos que resolver una ecuación es encontrar su conjunto solución. O sea, todos los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad.

Veamos cómo proceder.

1 | Cuando la ecuación es muy sencilla, puede resolverse mentalmente. Por ejemplo: para resolver la ecuación $x + 2 = 5$, basta con pensar qué número hay que sumar a 2 para que el resultado sea 5. Evidentemente este número es 3. Por lo tanto el conjunto solución es $S = \{3\}$

2 | En otros casos podemos resolver por tanteo. Por ejemplo, en la ecuación $3x + 15 = 84$ le vamos dando valores a x hasta encontrar el valor que verifica la igualdad.

Por ejemplo, empezamos probando con:

$x = 15$

$3 \cdot 15 + 15 = 60$

Falta para llegar a 84.

Entonces probamos con otro número mayor que 15. Si:

$x = 20$

$3 \cdot 20 + 15 = 75$

Todavía falta. Si:

$x = 25$

$3 \cdot 25 + 15 = 90$

Nos pasamos de 84. Por lo tanto el número buscado estará entre 20 y 25. Probamos con:

$x = 23$

$3 \cdot 23 + 15 = 84$

Por lo tanto $S = \{23\}$ es el conjunto solución de la ecuación dada.

3 | No siempre la ecuación es tan sencilla como para que se pueda resolver mentalmente. Tampoco el método por tanteo es sencillo si en la ecuación la variable aparece más de una vez o si la solución no es un número entero. Veamos, entonces, otra forma de resolución.

Ésta consiste en ir transformando la ecuación dada en otras equivalentes, más sencillas, hasta llegar a la ecuación más sencilla de todas que es aquella en la cual la incógnita queda sola en uno de los miembros de la igualdad. Este procedimiento recibe el nombre de "ir despejando la incógnita".

Para despejar la incógnita debemos tener en cuenta las siguientes propiedades:

Propiedad uniforme

Si sumamos o restamos un mismo número o expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente a la dada.
Si multiplicamos o dividimos por un mismo número o expresión algebraica (distinta de cero) a los dos miembros de una ecuación obtenemos una ecuación equivalente a la dada.

Propiedad cancelativa

Si sumamos y restamos un mismo número o expresión algebraica a un miembro de una ecuación obtenemos una ecuación equivalente a la dada.
Si multiplicamos y dividimos un término de una ecuación por un número distinto de cero obtenemos una ecuación equivalente a la dada.

Apliquemos estas propiedades a las ecuaciones de la Actividad 14.

Para el problema 1 tomemos el **caso a**:

$$x - 1 + x + x + 1 = 63$$

Si aplicamos la propiedad cancelativa **1 y –1** se cancelan:

$$x + x + x = 63$$

Agrupamos las **x**:

$$3x = 63$$

Aplicamos la propiedad uniforme y dividimos ambos miembros por 3:

$$\frac{3x}{3} = \frac{63}{3}$$

Simplificamos y obtenemos:

$$x = 21$$

Pedro: $x - 1 = 21 - 1 = 20$

Juan: $x = 21$

Luis: $x + 1 = 21 + 1 = 22$

Para el problema 2 tomemos el **caso** b:

$$x + x + 15 + x - 12 = 102$$

Aplicamos la propiedad uniforme restando 15 y sumando 12 a ambos miembros:

$$x + x + 15 - 15 + x - 12 + 12 = 102 - 15 + 12$$

Aplicamos la propiedad cancelativa y cancelamos 15 con -15 y 12 con -12:

$$x + x + x = 102 - 15 + 12$$

Agrupamos las **x** y operamos:

$$3x = 99$$

Aplicamos la propiedad uniforme y dividimos ambos miembros por 3

$$\frac{3x}{3} = \frac{99}{3}$$

Simplificamos y obtenemos:

$$x = 33$$

Marcela: $x + 15 = 33 + 15 = 48$

María: $x = 33$

Marta: $x - 12 = 33 - 12 = 21$

:| Puede usted resolver las otras ecuaciones propuestas para cada problema y verificar que el resultado obtenido, en términos del problema, no cambia.

Conclusión
El resultado de un problema no cambia a pesar de que para un mismo problema pueden plantearse distintas ecuaciones según a quién se tome como referencia pues una vez resuelta la ecuación deben interpretarse los resultados.

En el caso del problema 3 la ecuación planteada era:

$$25x - 15\,(50 - x) = 370$$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$25\,x - 15 \cdot 50 + 15x = 370$$

Operamos:

$$25x - 750 + 15x = 370$$

Aplicamos la propiedad uniforme y sumamos 750 a ambos miembros

$$25x - 750 + 750 + 15x = 370 + 750$$

Aplicamos la propiedad cancelativa y cancelamos -750 con 750

$$25x + 15x = 370 + 750$$

Operamos:

$$40x = 1.120$$

Aplicamos la propiedad uniforme y dividimos ambos miembros por 40:

$$\frac{40x}{40} = \frac{1.120}{40}$$

Simplificamos y obtenemos:

$$x = 28$$

Esteban tuvo 28 respuestas correctas.

ACTIVIDAD 16

:| Compare las primeras resoluciones que se propusieron para los problemas con las resoluciones algebraicas propuestas luego. Indique ventajas y desventajas de cada una de ellas.

Conclusión
Si comparamos, para cada uno de los problemas propuestos, las resoluciones aritméticas con las algebraicas veremos que en el caso del problema 1 la resolución aritmética era más sencilla que el planteo de ecuaciones. A medida que la resolución aritmética se complica, la resolución algebraica resulta más conveniente. Ese es el caso del problema 3. En cada problema usted podrá decidir qué tipo de resolución resulta más apropiada.

ACTIVIDAD 17

:| A continuación le proponemos una serie de problemas para que resuelva utilizando el método que considere más conveniente.

a :| Martín, Pedro, Luis y Juan están juntando dinero para comprarle un regalo de cumpleaños a su padre. Pedro aporta \$2 más que Martín, Luis \$2 más que Pedro y Juan \$2 más que Luis. Entre los 4 tienen \$104. ¿Cuánto dinero aporta cada uno?

ACTIVIDAD **17**
[continuación]

b :| María tiene 23 monedas, algunas de 10 centavos y otras de 25 centavos. En total tiene $4,55 ¿Cuántas monedas de cada clase tiene?

c :| José trabaja en una empresa de medicina prepaga. Cobra un sueldo mensual de $600 y recibe en concepto de comisión $12,50 por cada nuevo afiliado que logra. ¿Cuántas personas debe afiliar por mes si quiere duplicar su sueldo básico?

Otros usos de las expresiones algebraicas

Hasta ahora hemos trabajado con un tipo de expresiones algebraicas, las ecuaciones que nos sirven como herramienta para resolver problemas.

A continuación veremos otros usos de las expresiones algebraicas.

Las expresiones algebraicas como herramienta para demostrar propiedades matemáticas

Problema 4

Martín está estudiando Matemática. En un libro leyó las siguientes propiedades matemáticas:

a | La suma de dos números pares es siempre un número par.

b | La suma de dos números impares es siempre un número par.

¿Cómo puede hacer Martín para comprobar si estas afirmaciones son verdaderas?

:| Primero intente resolver el problema y luego compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

Para resolver este problema uno puede comenzar probando si las afirmaciones propuestas se verifican para algunos números.

Tomemos, por ejemplo, el **caso a**:

$2 + 4 = 6$ $\qquad 10 + 12 = 22$ $\qquad 52 + 84 = 136$

Si encontráramos algún ejemplo que no cumpliera con la afirmación, bastaría para decir que es falsa (esto recibe el nombre de contraejemplo). Sin embargo, encontrar muchos ejemplos que sí la cumplen no basta para afirmar que es verdadera.

Podría ser que, simplemente, todavía no encontramos el contraejemplo. Para poder afirmar que las proposiciones dadas son verdaderas, independientemente de los números elegidos, debemos recurrir a las expresiones algebraicas.

Veamos cómo proceder:

Un número par cualquiera puede escribirse de la forma $2n$ porque como n representa cualquier número al estar multiplicado por dos nos aseguramos que también podrá dividirse por dos, y por lo tanto será par. Siguiendo el mismo criterio, otro número par cualquiera podría ser $2m$.

Sumando ambos números se obtiene:

$$2n + 2m$$

Sacando factor común 2:

$$2n + 2m = 2\ (n + m)$$

Como la suma de dos números enteros es otro número entero podemos llamar q al resultado de sumar $n + m$.

Reemplazando nos queda:

$$2n + 2m = 2q$$

Y, como $2q$ también es la expresión de un número par, ahora sí podemos afirmar que la suma de dos números pares siempre será un número par.

Veamos que pasa con el **caso b**.

El siguiente de un número par es siempre un número impar, por lo tanto podemos decir que la expresión $2n + 1$ corresponde a un número impar cualquiera. Otro número impar cualquiera podría expresarse como $2m + 1$.

Por lo tanto su suma sería:

$$2n +1 + 2m + 1$$

Operando obtenemos:

$$2n +1 + 2m + 1= 2\ n + 2\ m + 2$$

Sacando factor común 2:

$$2n +1 + 2m + 1 = 2\ (n + m + 1)$$

Como $n + m$ son números enteros, la suma que está dentro del paréntesis también es un número entero, al que llamaremos p.

$$2n +1 + 2m + 1= 2p$$

Y, como $2p$ también es la expresión de un número par, ahora sí podemos afirmar que la suma de dos números impares siempre será un número par.

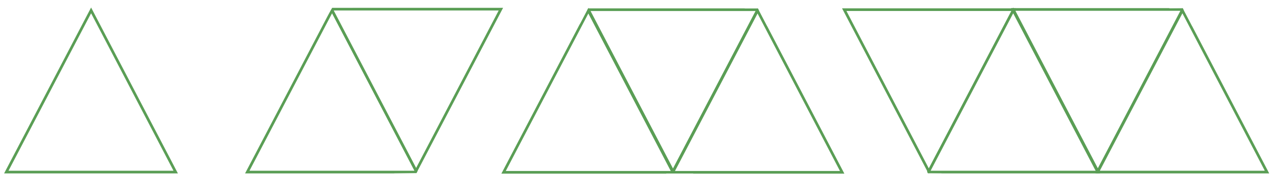
Hemos utilizado las expresiones algebraicas para demostrar propiedades matemáticas.

Las expresiones algebraicas como herramienta para hacer generalizaciones

Veamos ahora otro uso de las expresiones algebraicas.

Problema 5

Dibujamos un triángulo equilátero. Tenemos tres segmentos iguales que corresponden a cada uno de los lados del triángulo. Le adosamos otro triángulo igual. Ahora tenemos cinco segmentos de la medida de los lados del triángulo inicial. Repetimos el procedimiento de adosar triángulos. ¿Cuántos segmentos de la misma medida que los lados del triángulo inicial tendrá la figura obtenida al adosar 5 triángulos? ¿Y la que esté formada por 20 triángulos? ¿y para una cantidad **t** de triángulos?



Sugerencia: para calcular el número de lados que se obtienen al adosar 5 triángulos bastaría con dibujar un triángulo más y contar los lados. Pero este procedimiento se complica si tenemos 20 triángulos. Para resolver esta situación podemos armar una tabla como la siguiente y tratar de encontrar qué relación existe entre la cantidad de triángulos y los lados.

Triángulos	1	2	3	4	5	...	20	...	**t**
Lados	3	5	7	9					

:| Ahora intente resolver el problema y luego compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

Necesitamos generar una fórmula que nos permita calcular el número de lados, teniendo como dato la cantidad de triángulos. Para ello debemos encontrar un cálculo que relacione 1 con 3, 2 con 5, 3 con 7, 4 con 9. La estructura del cálculo debe ser siempre la misma, lo que va cambiando es el valor correspondiente a la cantidad de triángulos.

O sea, debemos encontrar un cálculo utilizando el 1 que dé como resultado 3. Pero ese mismo cálculo, cambiando el 1 por 2 debe dar 5. Y cambiando el 2 por 3 debe dar 7.

Por ejemplo:

$$1 \cdot 2 + 1 = 3$$
$$2 \cdot 2 + 1 = 5$$
$$3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$t \cdot 2 + 1 = l$$

Observamos que para obtener la cantidad de lados hay que multiplicar la cantidad de triángulos por 2 y luego sumar 1.

Por lo tanto para 5 triángulos la cantidad de lados será:

$$2 \cdot 5 + 1 = 11$$

Y para 20 triángulos tendremos:

$2 \cdot 20 + 1 = 41$ lados

En general para **t** triángulos obtenemos la siguiente expresión que permite calcular la cantidad **l** de lados :

$$l = 2\,t + 1$$

Hemos usado las expresiones algebraicas para hacer generalizaciones.

Conclusión
Las expresiones algebraicas pueden ser utilizadas para resolver problemas (problemas 1, 2 y 3), para demostrar propiedades matemáticas (problema 4) y para hacer generalizaciones (problema 5).

ACTIVIDAD 18

:| Demuestre las siguientes propiedades:

a :| La suma de un número par y otro impar es siempre impar.

b :| El producto de dos números pares es siempre par.

c :| El producto de dos números impares es siempre impar.

d :| El producto de un número par por otro impar es siempre par.

ACTIVIDAD 19

:| Indique el valor que ocupará el décimo lugar en cada una de las siguientes sucesiones:

a :| 2, 5, 10, 17, 26, ...

b :| 2, 5, 8, 11, 14, ...

Sugerencia: complete primero las siguientes tablas y luego trate de encontrar una fórmula que relacione cada valor con su posición.

Posición	1	2	3	4	5	...	**P**
Valor	2	5	10	17	26	....	....

Posición	1	2	3	4	5	...	**P**
Valor	2	5	8	11	14	....	....

Inecuaciones

A continuación trabajaremos con otro tipo de expresiones algebraicas, las inecuaciones. A diferencia de las ecuaciones que se traducen mediante igualdades, las inecuaciones se traducen mediante desigualdades, es decir que ambos miembros estarán relacionados por medio de los signos mayor ($>$), mayor o igual ($\geq$), menor ($<$) o menor o igual ($\leq$).

Por ejemplo:

Pedro tiene a lo sumo $25 se traduce: $P \leq 25$

Laura y Marta juntaron entre ambas, por lo menos $40 se traduce: $L + M \geq 40$

Juan es menor que Martín se traduce: $J < M$

Hoy a la tarde la temperatura superará los 15º C se traduce: $T > 15$

Problema 6

:| Plantee una expresión que permita resolver cada una de las situaciones siguientes:

a :| Una mañana, Juan escucha por radio que la temperatura en ese momento es de 15 ºC. Anuncian que habrá ascenso de temperatura y que se espera una máxima de 23 ºC. ¿Cuáles pueden ser los valores de temperatura para el resto del día, si se cumple el pronóstico?

b :| En una verdulería el kg de naranjas cuesta $1,50 y el kg de manzanas $2. ¿Cuántos kg de naranjas y manzanas puede comprar una persona si no quiere gastar más de $6?

:| Compare las expresiones que usted planteó con las que le proponemos a continuación.

En el caso a vemos que la temperatura podrá tomar cualquier valor que sea mayor o igual 15 y menor o igual que 23.

Si llamamos T a la temperatura, esto se simboliza:

$$15 \leq T \leq 23$$

En el caso b lo que se gasta en cada fruta se obtiene multiplicando el precio por la cantidad de kg. Además el gasto total debe ser menor o igual que $6. Si llamamos n a los kg. de naranja y m a los kg. de manzana, esto se simboliza:

$$1{,}5n + 2m \leq 6$$

Ciertos enunciados, como los que se utilizan en los ejemplos presentados, se traducen mediante **desigualdades**. Las expresiones algebraicas que están formadas por desigualdades, reciben el nombre de **inecuaciones**. En ellas también puede haber una o más variables. Resolver una inecuación significa hallar el conjunto de todos los valores que pueden tomar las variables de modo que la desigualdad sea verdadera, es decir hallar el conjunto solución.

El caso a corresponde a una inecuación con una variable (la temperatura). La desigualdad será verdadera para cualquier valor comprendido entre 15 y 23. Por ejemplo, 15; 18; 20,5; 22, etc. y falsa para cualquier valor menor que 15 o mayor que 23. Por ejemplo 14; 11; 25, etc. Decimos entonces que 15; 18; 20,5; 22 son algunas de las soluciones de la inecuación. Son algunos de los valores que forman el conjunto solución.

El caso b corresponde a una inecuación con dos variables (los kg de naranjas y los kg de manzanas). La desigualdad será verdadera, por ejemplo si $n = 1$ y $m = 2$ o si $n = 2$ y $m = 2$ y será falsa si por ejemplo, $n = 3$ y $m = 1$.

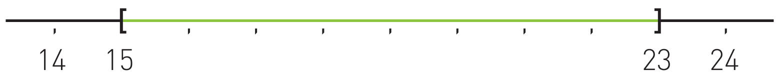
Decimos, entonces que los pares (1,2); (2,2) son algunas de las soluciones de la inecuación. Son algunos de los pares que forman el conjunto solución.

Cuando se trata de inecuaciones con una variable, cuyo conjunto solución pertenece al conjunto de los números reales, se puede expresar el conjunto solución por medio de **intervalos**.

En nuestro caso $S = \{T \in R \,/\, T \in [15; 23]\}$ y se lee: el conjunto solución está formado por todos los números reales tales que esos números pertenecen al intervalo [15; 23].

Recordemos algunos símbolos:
/ se lee: tal que
$\in$ se lee: pertenece

Este intervalo se representa en la recta numérica del siguiente modo:



Los números 15 y 23 son los extremos del intervalo. Si, como en este caso, los valores extremos pertenecen al conjunto solución, el intervalo recibe el nombre de **intervalo cerrado** y usamos corchetes para simbolizarlo. Si, por el contrario, los valores extremos no pertenecen al conjunto solución, el intervalo es un **intervalo abierto** y usamos paréntesis para simbolizarlo.

Por ejemplo:

La cooperativa de electricidad de una ciudad de la Provincia de Buenos Aires ofrece un descuento del 10% en la facturación para aquellos usuarios cuyos consumos superen los $30 y no lleguen a los $90. ¿Cuáles deben ser los valores de consumo para poder acceder al beneficio?

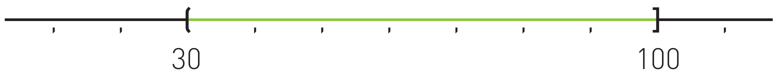
Si llamamos **c** al consumo, vemos que este debe ser mayor que 30 y menor que 90, sin incluir ninguno de estos valores. Esto se simboliza $30 < c < 90$. Los valores de **c** se encuentran dentro del intervalo (30; 90). En la recta numérica se representa:

Si alguno de los extremos pertenece al conjunto solución y el otro no, el **intervalo** se llama **semiabierto o semicerrado**.

Por ejemplo:

Elsa sale de su casa con $100. Debe pasar por el banco a pagar un impuesto de $30. Luego tiene que ir al supermercado. ¿De cuánto dinero dispone para gastar en el supermercado?

Si llamamos **d** al dinero que le queda para gastar en el supermercado, los valores que puede tomar **d** se encuentran entre 30 y 100, sin incluir el 30, pero incluyendo el 100. Esto se simboliza $\mathbf{30 < d \leq 100}$. Los valores de **d** se encuentran dentro del intervalo (30; 100]. En la recta numérica se representa.



ACTIVIDAD 20

:| Exprese mediante inecuaciones los siguientes enunciados.

a :| Los números naturales menores o iguales que 4.

b :| Los números reales mayores que –2 y menores que 5.

c :| El precio de 4 cuadernos no supera los $15.

d :| El dinero que tiene Pedro es a lo sumo igual al que tiene Juan.

e :| El peso de Mariela es, por lo menos, igual al doble del peso de su hermanita, Laura.

f :| El precio del kg de naranjas no supera al precio del kg de manzanas.

ACTIVIDAD 21

:| Indique cuál o cuáles de los siguientes valores de **x** corresponden a una solución de la siguiente inecuación:

$3\,(x - 1) + 2 > 5x - 2$

a :| $x = 0$ c :| $x = 2$

b :| $x = -2$ d :| $x = 1/2$

ACTIVIDAD 22

:| Exprese las siguientes inecuaciones como intervalos de números reales y represéntelos en la recta numérica.

a :| $-3 \leq x \leq 4$ d :| $5 < x < 8$

b :| $2 < x \leq 6$ e :| $x \leq 4$

c :| $-4 \leq x < 4$ f :| $x > 2$

ACTIVIDAD 23

:| Dada la siguiente desigualdad $4 < 12$ realice en cada caso la operación indicada y establezca si se mantiene o no la desigualdad anterior:

a :| Sumar a ambos miembros un mismo número positivo.

b :| Sumar a ambos miembro un mismo número negativo.

c :| Restar a ambos miembros un mismo número positivo.

d :| Restar a ambos miembros un mismo número negativo.

e :| Multiplicar ambos miembros por un mismo número positivo.

f :| Multiplicar ambos miembros por un mismo número negativo.

g :| Dividir ambos miembros por un mismo número positivo.

h :| Dividir ambos miembros por un mismo número negativo.

:| Enuncie una conclusión.

:| A continuación compare su conclusión con la que figura en la clave de corrección.

Resolución de inecuaciones

Problema 7

Roberto trabaja como personal de maestranza en una editorial. Tiene que bajar paquetes con libros en un montacargas en el que puede cargar hasta 500 kg. Sabiendo que Roberto pesa 85 kg y que cada paquete de libros pesa 25 kg, ¿Cuántos paquetes puede bajar, a lo sumo, en cada viaje?

:| Intente resolver el problema y luego compare su resolución con las que le proponemos a continuación.

Puede que usted haya resuelto el problema en forma aritmética.

Si el montacargas soporta hasta 500 kg y le descuento lo que pesa Roberto, me quedan 415 kg para los libros. Como cada paquete de libros pesa 25 kg 415 dividido 25 es igual a 16,6.

Verifico el resultado obtenido. Como el número de paquetes debe ser un número natural, o llevo 16 paquetes o llevo 17.

17 x 25 = 425, me paso de los 415 kg permitidos

16 x 25 = 400

Entonces la respuesta correcta es: puede llevar hasta 16 paquetes en cada viaje.

También puede resolver este problema por tanteo, o sea buscando valores hasta llegar al correcto.

El peso que llevará en cada viaje se calcula multiplicando 25 por la cantidad de paquetes y sumando 85 a ese resultado. El cálculo final no debe ser superior a 500.

Armemos una tabla:

Paquetes	Peso total
1	$85 + 25 \cdot 1 = 110$
2	$85 + 25 \cdot 2 = 135$
5	$85 + 25 \cdot 5 = 210$
8	$85 + 25 \cdot 8 = 285$
15	$85 + 25 \cdot 15 = 460$
16	$85 + 25 \cdot 16 = 485$
17	$85 + 25 \cdot 17 = 510$

Con 16 paquetes no se llega a 500 kg pero con 17 se pasa. Por lo tanto no puede llevar más de 16 paquetes en cada viaje.

Por último vamos a proponer una forma algebraica. Para ello es necesario traducir el enunciado del problema en una inecuación. Si llamamos **x** a la cantidad de paquetes que se puede llevar en cada viaje obtenemos la siguiente expresión:

$$25 \cdot x + 85 \leq 500$$

Ahora debemos despejar la incógnita. Para ello procederemos de forma similar a como lo hicimos para resolver ecuaciones. Pero, además, deberemos tener en cuenta las conclusión de la Actividad 23.

Restamos 85 a ambos miembros y mantenemos el sentido de la desigualdad:

$$25 \cdot x + 85 - 85 \leq 500 - 85$$

Operamos:

$$25 \cdot x \leq 415$$

Dividimos ambos miembros por 25 y mantenemos el sentido de la desigualdad:

$$\frac{25 \cdot x}{25} \leq \frac{415}{25}$$

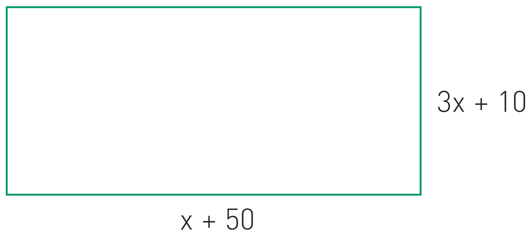
Operamos y obtenemos:

$$x \leq 16,6$$

Como el número que buscamos debe ser natural, el número es 16.

Problema 8

Hallar los valores de **x** para los cuales la base es mayor que la altura.



:| Intente resolver el problema y luego compare su resolución con las que proponemos a continuación.

Una posible forma de resolución sería por tanteo. Para ello conviene disponer los datos en una tabla como la siguiente:

X	**Base (x +50)**	**Altura (3x + 10)**
5	55	25
15	65	55
20	70	70
21	71	73

Vemos que para valores hasta 20, sin incluirlo, la base es mayor que la altura. Para **x** igual a 20, la base es igual a la altura y para valores mayores de 20, la base es menor que la altura.

Por lo tanto los valores de **x** para los cuales la base es mayor que la altura deben ser menores que 20.

Antes de continuar con la lectura responda la siguiente pregunta.

:| ¿Podemos considerar cualquier valor menor que 20, por ejemplo –10? ¿Por qué?

Como estamos trabajando con un problema geométrico, ni la base ni la altura pueden ser nulas ni negativas. ¿Cuál es el menor valor que podemos darle a **x** de modo tal que tanto la base como la altura resulten positivas?

En el caso de la base es fácil ver que, para que sea positiva, la **x** debe tomar valores mayores que – 50. En el caso de la altura podemos probar valores negativos de **x** hasta encontrar el valor a partir del cual la altura se anula o resulta negativa.

:| Le proponemos que intente encontrar la respuesta antes de proseguir con la lectura. No olvide tener en cuenta que los valores de los lados de una figura geométrica no tienen porque ser necesariamente números enteros.

¿Encontró usted el valor que buscaba?

Seguramente no le resultó sencillo.

Veamos ahora la resolución algebraica:

Si traducimos en símbolos el enunciado del problema, obtenemos la siguiente inecuación:

$$x + 50 > 3\,x + 10$$

Despejemos la incógnita. Para ello debemos agrupar en uno de los miembros los términos que tienen la incógnita y en el otro los que no la tienen.

Restamos 50 y 3x a ambos miembros y mantenemos el sentido de la desigualdad:

$$x + 50 - 50 - 3x > 3x + 10 - 50 - 3x$$

Cancelamos 50 con – 50 y 3x con – 3x

$$x - 3x > 10 - 50$$

Operamos:

$$-2x > -40$$

Dividimos ambos miembros por -2 y como se trata de un número negativo cambiamos el sentido de la desigualdad:

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-40}{-2}$$

Operamos y obtenemos:

$$x < 20$$

Para recordar:

Para resolver una inecuación deben seguirse los mismos pasos que para resolver una ecuación pero teniendo en cuenta que, si en algún paso necesita multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un mismo número negativo hay que cambiar el sentido de la desigualdad.

Ahora debemos tener en cuenta las otras condiciones del problema. Tanto la base como la altura deben ser números positivos. Escribamos estas condiciones en lenguaje simbólico:

$$x + 50 > 0 \qquad y \qquad 3x + 10 > 0$$

Resolvamos estas inecuaciones:

$$x + 50 - 50 > 0 - 50 \qquad\qquad 3x + 10 - 10 > 0 - 10$$

$$x > -50 \qquad\qquad \frac{3x}{3} > \frac{-10}{3}$$

$$x > -10/3$$

Como los valores de **x** tienen que cumplir con las dos condiciones y los números mayores que –10/ 3 son mayores que –50, debemos tomar valores mayores que –10/3.

Por lo tanto la respuesta de nuestro problema sería. Los valores que puede tomar **x** para que la base resulte mayor que la altura deben ser mayores que –10/3 y menores que 20.

En símbolos expresamos el conjunto solución de la forma siguiente:

$$S = \{x \in R \,/\, x \in (-10/3;\, 20)\}$$

ACTIVIDAD 24

Una empresa de telefonía cobra mensualmente \$33 en concepto de abono y \$0,045 por cada minuto que se utilice el servicio.

:| ¿Cuántos minutos puede hablar, a lo sumo, una persona que no quiere pagar más de \$50 mensuales?

ACTIVIDAD 25

Adriana dispone de \$50 para comprarse ropa. No le alcanza para comprarse dos pantalones, pero si compra dos remeras del mismo precio y un pantalón que cuesta \$29 le sobra.

:| ¿Cuál puede ser, como máximo, el precio de cada remera?

ACTIVIDAD 26

:| Encuentre tres soluciones enteras (soluciones cuyos valores sean números enteros) para cada una de las siguientes inecuaciones:

a :| $3x - 2x + 2 < 2\,(x - 1)$

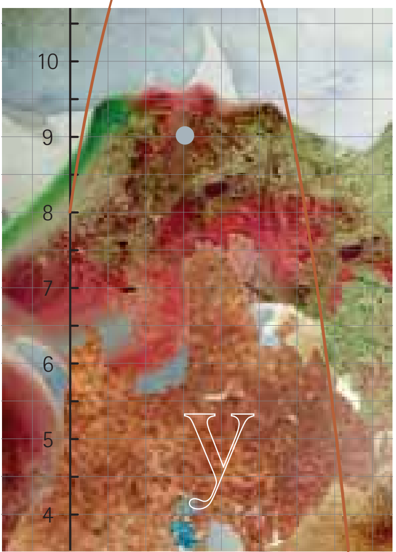
b :| $5x - 3 \geq 2x - (x + 3)$

ACTIVIDAD 27

:| Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, expréselo como intervalo y represéntelo en la recta numérica.

a :| $2x - 1 > 3(x - 2) + 4$

b :| $3x - 4(3 + x) \leq 5x$



2 UNIDAD
Ecuaciones

Problema 1

En un espectáculo teatral las entradas costaban \$15 para los mayores y \$10 para los menores de 12 años. Un día determinado se recaudaron \$4.500.

Con esta información, ¿es posible saber, exactamente, cuántos mayores y cuántos menores asistieron ese día?

:| Antes de proseguir con la lectura, intente resolver el problema.

:| A continuación realice las siguientes actividades.

a :| Identifique las incógnitas, asígneles una letra a cada una y escriba el enunciado del problema en lenguaje simbólico.

b :| Escriba cinco posibles soluciones y explique cómo hizo para hallarlas.

c :| Grafique los pares que corresponden a las posibles soluciones, en un sistema de ejes cartesianos.

d :| Indique entre qué valores se pueden encontrar los valores de las soluciones

:| Ahora compare su forma de resolver con las que proponemos a continuación:

Por ejemplo, para la situación propuesta, podemos llamar **x** a la cantidad de mayores e **y** a la cantidad de menores que asistieron al teatro ese día y escribir la siguiente ecuación:

$$15x + 10y = 4.500$$

También podríamos llamar **x** a la cantidad de menores e **y** a la cantidad de mayores. En ese caso obtendríamos esta otra ecuación:

$$15y + 10x = 4.500$$

Veremos, más adelante, que esto no cambia la solución del problema.

Una forma de encontrar las soluciones es tomar cualquiera de las expresiones anteriores e ir probando valores para cada una de las letras hasta encontrar aquellos que verifican la igualdad planteada.

Este camino puede no ser sencillo.

¿Existirá alguna manera más fácil?

Tomemos, por ejemplo, la primera expresión $15x + 10y = 4.500$ y escribamos las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$10y = 4.500 - 15x$$

$$y = \frac{4500 - 15x}{10}$$

$$y = 450 - 1{,}5x$$

Vayamos asignándole valores a una de las letras, en este caso la x, y calculemos cuánto debe valer la y. Tengamos en cuenta que sólo podemos asignar a x números naturales pues x representa cantidad de personas.

Por ejemplo, si asignamos a x el valor 30 y realizamos el siguiente cálculo:

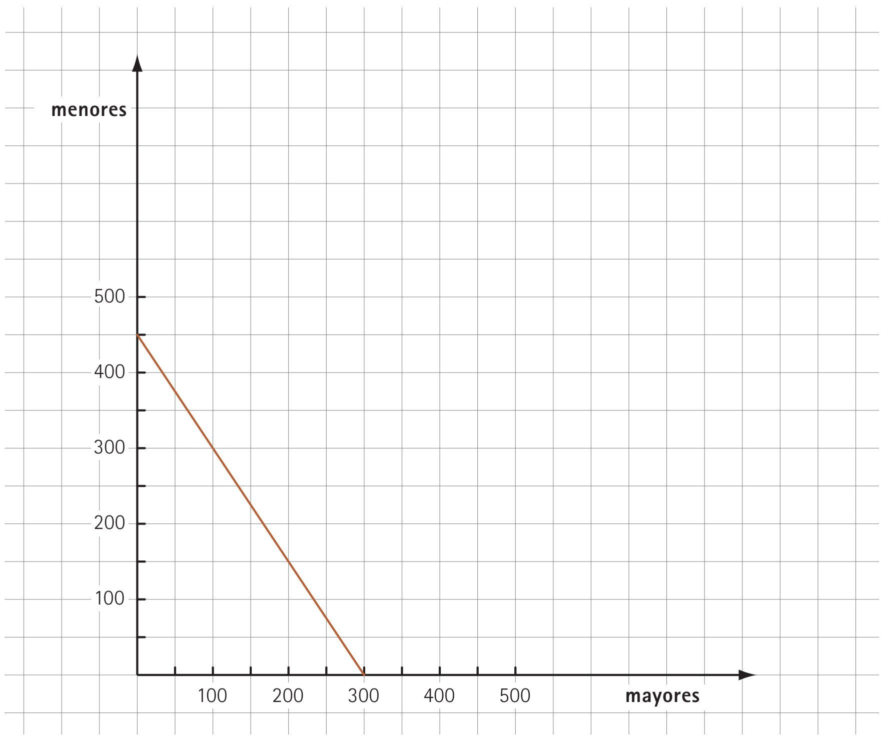
$450 - 1{,}5 \cdot 30$, obtenemos el valor correspondiente de y. En este caso, 405.

Repitiendo este procedimiento para otros valores de x podemos obtener otras soluciones.

Si para un determinado valor de x elegido hacemos el cálculo y no nos da un número natural, lo descartamos porque tanto x como y se refieren a cantidad de personas y deben ser números naturales.

Los pares (30; 405), (100; 300), (200; 150), (150; 225) son algunos de los pares que son solución de la ecuación planteada.

Representando estos pares en un sistema de ejes cartesianos, obtenemos la siguiente gráfica:



Los puntos quedan alineados. Los pares ordenados que son solución de esta ecuación son las coordenadas naturales de puntos que pertenecen a la recta:

$$y = 450 - 1{,}5x$$

La respuesta al problema planteado sería:

Con la información que nos dan no es posible saber exactamente cuántas personas concurrieron al teatro ese día. Podrían haber ido 30 mayores y 405 menores, o 100 mayores y 300 menores, o 200 mayores y 150 menores, etc.

Veamos qué sucede si trabajamos con la otra expresión:

$$15y + 10x = 4.500$$

Tal como hicimos antes, despejemos una de las letras:

$$15y = 4.500 - 10x$$

$$y = \frac{4.500 - 10x}{15}$$

$$y = 300 - 2/3x$$

Vayamos dándole valores a **x** y calculando los respectivos valores de **y**.

Por ejemplo:

Si $x = 300$

$y = 300 - 2/3 \cdot 300 = 100$

Si $x = 150$

$y = 300 - 2/3 \cdot 150 = 200$

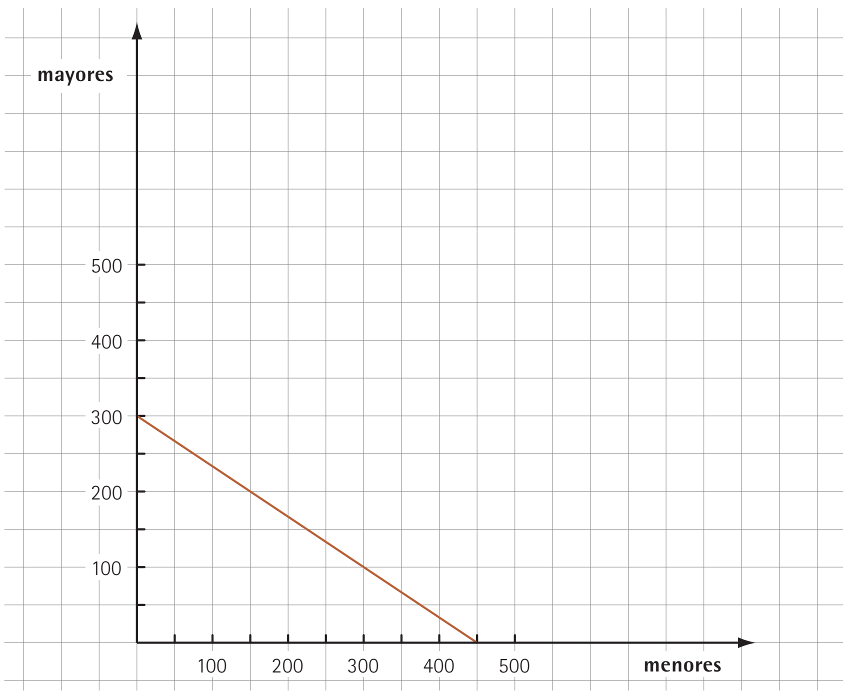
Los pares (300; 100), (150; 200) son algunos de los pares que son solución de la ecuación planteada.

Teniendo en cuenta que, en este caso, **x** representa la cantidad de menores e **y** la cantidad de mayores, la respuesta al problema planteado sería:

Con la información que nos dan no es posible saber exactamente cuántas personas concurrieron al teatro ese día. Podría haber 300 menores y 100 mayores, o 150 menores y 200 mayores, etc. que coincide con la obtenida anteriormente.

¿Y qué sucede con el gráfico?

Representando estos pares en un sistema de ejes cartesianos, obtenemos la siguiente gráfica:



Donde ahora todo lo que antes estaba sobre el eje **x** está sobre el eje **y** y viceversa.

Nuevamente los puntos quedan alineados. En este caso los pares ordenados que son solución de esta ecuación son las coordenadas naturales de puntos que pertenecen a la recta:

$$y = 300 - 2/3x$$

SÍNTESIS

Según qué letra se le asigne a cada variable se obtendrán diferentes expresiones para trabajar pero esto no cambiará la respuesta del problema pues cuando se interpreten las soluciones se lo hará teniendo en cuenta el significado que, previamente, le hemos dado a cada letra.

Problema 2

Martín y Pedro son compañeros de trabajo. Un día, a la salida del trabajo van a tomar un café juntos. Cuando llega el momento de pagar, Martín le propone a Pedro: Acabo de pensar en dos números. Si adivinás qué números pensé, pago yo. Si no, pagás vos. Pero, para que el trato no sea injusto, voy a darte una pista: el siguiente de uno de esos números es igual al doble del otro. ¿Le conviene a Pedro aceptar el trato? ¿No estará Martín haciendo lo posible por no pagar el café?

:| Nuevamente intente resolver el problema y realizar las actividades que figuran a continuación, antes de seguir leyendo:

a :| Identifique las incógnitas, asígneles una letra a cada una y escriba el enunciado del problema en lenguaje simbólico.

b :| Escriba cinco posibles soluciones.

c :| Grafique los pares que corresponden a las posibles soluciones, en un sistema de ejes cartesianos.

d :| Indique entre qué valores se pueden encontrar los valores de las soluciones.

:| Ahora compare su forma de resolver con la que proponemos a continuación.

Llamando **x** a uno de los números buscados **y** al otro, las posibles ecuaciones a plantear en este caso serían:

$$x + 1 = 2y \qquad \text{o} \qquad y + 1 = 2x$$

Como ya dijimos es indistinto tomar una u otra para trabajar. Despejando **y** de ambas ecuaciones se obtendrían las siguientes ecuaciones equivalentes.

$$y = (x + 1) / 2 = 1/2x + 1/2 \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

Como resulta más sencillo operar con la segunda ecuación, usamos ésta para seguir trabajando.

Nuevamente vamos dando valores a x y obtenemos los correspondientes valores de y. Por ejemplo, si $x = 0$, $y = -1$; si $x = 1$, $y = 1$; si $x = 2$, $y = 3$; si $x = -1$, $y = -3$.

Nótese que, como en este caso, tanto x como y se refieren a números, ahora no sólo podemos trabajar con números naturales sino que podríamos agregar números negativos, o sea trabajar con números enteros.

¿Se podrían asignar a x valores correspondientes a números reales, por ejemplo fracciones o números decimales?

:| Intente responder esta pregunta antes de seguir leyendo.

Como el enunciado del problema dice: el siguiente de un número... no podemos trabajar con números reales. Sólo los números enteros tienen un número siguiente.

En este caso, cada una de las posibles soluciones corresponde a las coordenadas enteras de un punto de la recta $y = 2x – 1$.

Veamos qué sucede con la cantidad de soluciones.

En el caso del problema 1 de esta Unidad, como existe un valor, el total del dinero recaudado, que no puede ser superado, y además tenemos que trabajar con números naturales, la cantidad de soluciones es un número finito.

En el problema 2 debemos trabajar con números enteros pero no hay ningún valor que no pueda ser superado. La cantidad de soluciones es, por lo tanto, un número infinito.

La respuesta a nuestro problema sería: no le conviene a Pedro aceptar el trato. Acertar un par de números entre infinitos pares posibles es infinitamente más difícil que ganarse la lotería.

Conclusiones

- *Las expresiones que usted ha planteado corresponden a ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.*
- *Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tienen más de una solución posible.*
- *La cantidad de soluciones será finita o infinita, dependiendo del contexto del problema a resolver, o sea del campo numérico con el que se trabaje y de las restricciones del problema.*
- *Cuando representamos las soluciones en un sistema de ejes cartesianos, los puntos siempre quedan alineados.*

ACTIVIDAD 28

A continuación le proponemos una serie de situaciones para que resuelva.

a :| Si Juan mide 10 cm más que María, ¿cuáles pueden ser las alturas de cada uno de ellos?

b :| En una canasta, el doble de la cantidad de naranjas más el triple de la cantidad de pomelos es igual a 36. ¿Cuántas naranjas y cuántos pomelos puede haber en la canasta?

c :| Pedro y Marta fueron juntos al supermercado. Entre ambos gastaron $100. ¿Cuánto dinero gastó cada uno?

d :| La diferencia entre dos números es igual a 14. ¿Cuáles pueden ser esos números?

Para cada una de ellas se pide que:

1 :| Identifique las incógnitas, les asigne una letra a cada una y escriba el enunciado del problema en lenguaje simbólico.

2 :| Escriba cinco posibles soluciones y explique cómo hizo para hallarlas.

3 :| Indique en qué casos la cantidad de soluciones es finita y en qué casos es infinita, justificando su respuesta.

Encontrará las respuestas en la Clave de corrección que figura al final del Módulo.

Sistemas de ecuaciones lineales

Problema 3

Volvamos a la situación del problema 1 de esta Unidad. Nos informan que ese día asistieron al teatro 400 personas. ¿Podemos ahora saber con exactitud cuántos mayores y cuántos menores asistieron?

Tenemos ahora una nueva información. ¿Será posible encontrar algún par ordenado de números que cumpla simultáneamente con las condiciones de este problema y del problema 1?

:| Intente resolver el problema. Para ello le proponemos que resuelva las siguientes actividades.

a :| Plantee esta **nueva información** en forma de ecuación

b :| Encuentre algunas soluciones para esta ecuación. Explique cómo lo hizo.

c :| ¿Coincide alguno de los pares hallados en el **punto b** con algún par que sea solución de la ecuación planteada en el problema 1?

d :| Grafique esta nueva ecuación en el mismo sistema que realizó en el problema 1 de esta Unidad.

:| Una vez resueltos los puntos anteriores, compare su solución con la que nosotros le proponemos.

Planteando en forma de ecuación esta nueva información obtenemos que:

$x + y = 400$

Despejando:

$y = 400 - x$

Dándole valores a **x**, obtenemos los correspondientes valores de **y**. Por ejemplo:

Si $x = 50$

$y = 350$

Si $x = 100$

$y = 300$

Si $x = 200$

$y = 200$

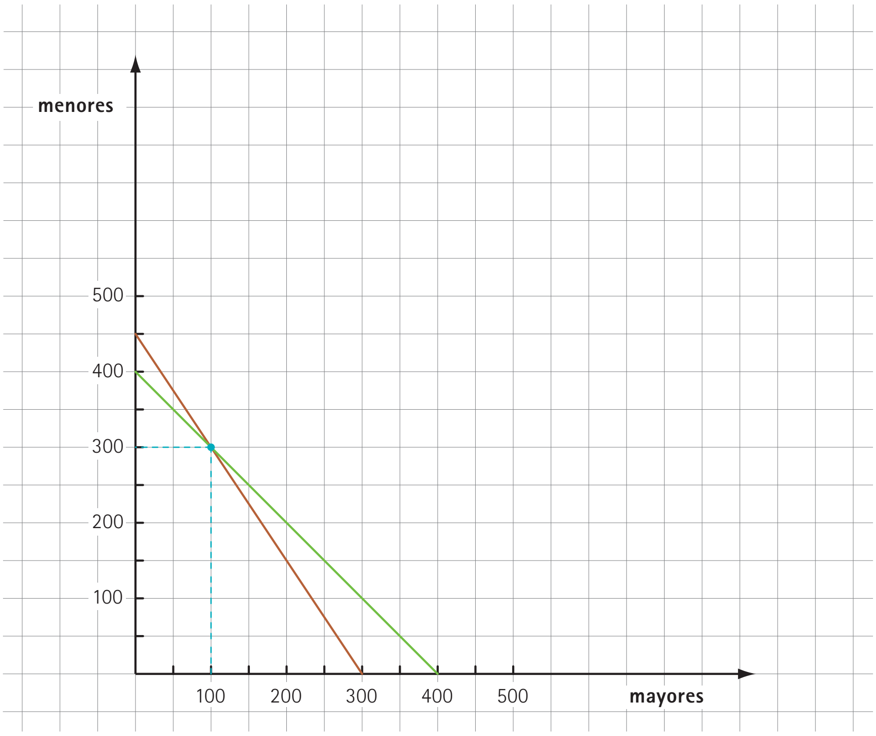
Vemos que el par ordenado (100; 300) era una de las soluciones de la ecuación $y = 450 - 1{,}5x$ (cumplía con las condiciones del problema 1). También es una de las soluciones de la ecuación $x + y = 400$ (cumple con la nueva condición). Decimos entonces que el par ordenado (100; 300) es solución del **sistema de ecuaciones lineales:**

$$\begin{cases} y = 450 - 1{,}5x \\ x + y = 400 \end{cases}$$

Si tenemos más de una ecuación que deben resolverse simultáneamente, decimos que éstas forman un sistema de ecuaciones. Si todas las ecuaciones que forman parte del sistema son ecuaciones lineales (aquellas cuya representación gráfica es una recta) se tiene un sistema de ecuaciones lineales.

Volviendo a nuestro problema, ahora sí podemos responder con exactitud cuántas personas mayores y cuántos menores asistieron ese día al teatro: 100 mayores y 300 menores.

La gráfica conjunta de ambas ecuaciones nos muestra lo siguiente:



El par ordenado (100; 300) corresponde a un punto de la recta $y = 450 - 1,5\,x$. También corresponde a un punto de la recta $y = 400 - x$.

Es, por lo tanto, el punto donde ambas rectas se cortan, el punto que comparten ambas rectas.

Conclusión

La solución gráfica de un sistema de ecuaciones es el punto en el cual se cortan las rectas que corresponden a cada una de las ecuaciones del sistema.

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales, graficamos ambas ecuaciones en un mismo sistema de ejes cartesianos y hallamos el punto de intersección de ambas rectas.

ACTIVIDAD 29

:| Resolver gráficamente el siguiente problema:

Camila nació cuatro años después que su hermana, Victoria. Actualmente la suma de sus edades es 32. ¿Qué edad tiene hoy cada una de ellas?

Métodos analíticos de resolución de sistemas de ecuaciones

Hasta ahora hemos visto dos formas de resolver un sistema de ecuaciones:

1 | Trabajar por separado con cada una de las ecuaciones, buscando soluciones para cada una de ellas hasta encontrar una solución que satisfaga a ambas. Esto puede ser muy difícil, sobre todo si el par buscado no pertenece a números enteros.

2 | Graficar ambas ecuaciones y buscar el punto donde se cortan las rectas que las representan. Nuevamente, si el punto donde se cortan no tiene coordenadas enteras, sólo podremos dar una respuesta aproximada.

¿Existirá una forma más sencilla que nos permita encontrar la solución exacta?

Otra forma de encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, o sea de encontrar el par que verifica simultáneamente ambas ecuaciones, es trabajar algebraicamente.

En nuestro caso:

$$\begin{cases} y = 450 - 1,5x \\ x + y = 400 \end{cases}$$

Se trata de encontrar los valores de **x** e **y** que verifican simultáneamente ambas igualdades.

Reemplazando la primera ecuación en la segunda obtenemos la siguiente ecuación:

$$x + 450 - 1,5x = 400$$

Se obtiene, de este modo, una ecuación con una sola incógnita.

Resolviendo esta ecuación obtenemos el valor de **x**:

$$x - 1,5x = 400 - 450$$

$$-0,5x = -50$$

$$x = \frac{-50}{-0,5}$$

$$x = 100$$

Una vez obtenido el valor de x, lo reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones que forman el sistema y obtenemos el correspondiente valor de y:

$$100 + y = 400$$
$$y = 400 - 100$$
$$y = 300$$

Decimos que el conjunto solución de nuestro sistema es $S = \{(100;\ 300)\}$

Problema 4

Muchas veces nos ofrecen servicios similares y debemos optar por alguno de ellos teniendo en cuenta distintos aspectos; la calidad del servicio es uno de ellos; otro es el costo en función del uso que le daremos.

Por ejemplo:

Una empresa de telefonía ofrece el siguiente servicio: un costo fijo de $20 en concepto de abono, más un costo de $0,25 por cada minuto de uso.

Otra empresa ofrece: un costo fijo de $15 en concepto de abono, más un costo de $0,27 por cada minuto de uso.

¿Cuántos minutos debe hablar una persona para que le resulte indistinto contratar los servicios de una u otra empresa? ¿Cuánto debería pagar en ese caso?

:| Intente resolver el problema y luego compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

Seguramente para resolver este problema usted habrá planteado y resuelto un sistema de ecuaciones.

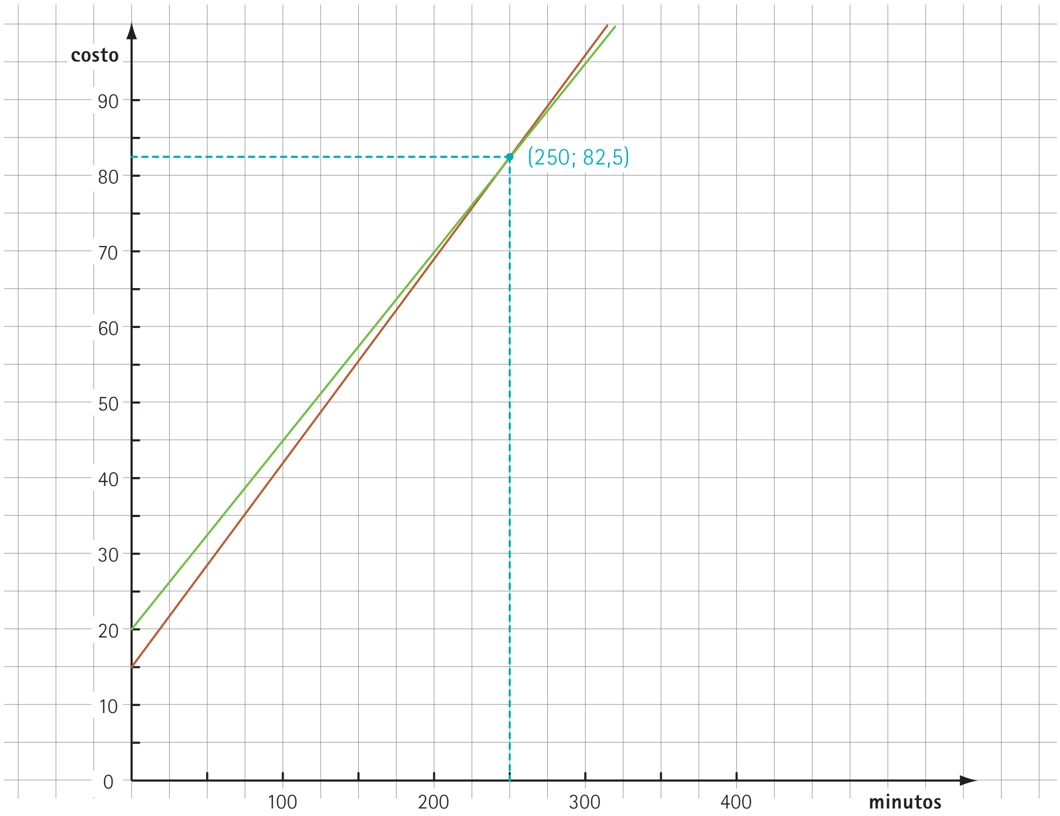
La resolución puede haber sido gráfica o analítica.

Por ejemplo, planteamos el sistema:

$$\begin{cases} y = 0{,}25\ x + 20 \\ y = 0{,}27\ x + 15 \end{cases}$$

Donde y representa el costo total que debemos pagar por el servicio, y x representa los minutos hablados.

Representando ambas ecuaciones en un mismo sistema de ejes cartesianos obtenemos la siguiente representación:



El punto de intersección de ambas rectas es la solución buscada. Hemos resuelto el problema en forma gráfica.

Para resolverlo analíticamente podemos trabajar de la siguiente forma:

Queremos hallar la cantidad de minutos para la cual ambas empresas cobrarán lo mismo. Por lo tanto podemos igualar los costos, o sea igualar las **y** de ambas ecuaciones:

$$0,25x + 20 = 0,27x + 15$$

Nos queda, nuevamente, una ecuación con una sola incógnita.

Resolvemos esta ecuación:

$$20 - 15 = 0,27\,x - 0,25x$$

$$5 = 0,02x$$

$$\frac{5}{0,02} = x$$

$$250 = x$$

Reemplazando el valor de **x** en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obtenemos el valor de **y**.

Si reemplazamos en la primera:

$y = 0{,}25 \cdot 250 + 20$

$y = 82{,}50$

Si reemplazamos en la segunda:

$y = 0{,}27 \cdot 250 + 15$

$y = 82{,}50$

La respuesta del problema es: hablando 250 minutos resulta indistinto contratar los servicios de una u otra empresa. En ambos casos habrá que pagar $82,50.

El conjunto solución de nuestro sistema está formado por el par (250; 82,50).

Se lo simboliza:

$$\{ S = (250; 82{,}50) \}$$

Como hemos visto, para resolver un sistema de ecuaciones hay muchos recursos, lo importante es saber elegir en cada caso el camino más conveniente.

En la resolución del problema 4 de esta Unidad el método que utilizamos se llama comúnmente de **igualación** (porque se igualaron las dos ecuaciones).

El camino que seguimos en la resolución analítica del problema 3, también de esta Unidad, que consistió en reemplazar una ecuación en la otra se llama habitualmente de **sustitución**, pero en el fondo es el mismo método, ya que cuando escribimos $0{,}25\,x + 20 = 0{,}27\,x + 15$ también estamos sustituyendo una ecuación en la otra. Existen otros métodos analíticos que no veremos en este Módulo.

ACTIVIDAD 30

:| Para cada uno de los problemas siguientes plantee un sistema de ecuaciones que le permita resolverlo y hallar la solución en forma analítica.

a :| En un triángulo rectángulo la amplitud de uno de los ángulos agudos es igual a la tercera parte de la amplitud del otro. Calcular la amplitud de cada uno de los ángulos. (Recordar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°).

b :| Un comerciante va a un banco a pedir cambio en monedas para su negocio. Cambia $30 en monedas de 10 centavos y de 25 centavos. Si en total le dan 150 monedas, ¿cuántas monedas de cada clase recibió?

Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Problema 5

¿Existirán dos números tales que la suma de ellos sea 50 y el doble de uno de ellos más el doble del otro sea 40?

:| Antes de seguir leyendo trate de resolver el problema con alguno de los métodos que propusimos anteriormente.

:| Ahora compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

El sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 2\,y = 40 \end{cases}$$

Despejando **y** de la primera ecuación y reemplazándola en la segunda:

$$y = 50 - x$$

$$2x + 2\,(50 - x) = 40$$

Aplicando propiedad distributiva para eliminar el paréntesis:

$$2x + 100 - 2x = 40$$

Operando:

$$2x + 100 - 2x = 40$$

$$100 = 40$$

¿Cien igual a cuarenta?

Hemos llegado a una igualdad falsa. Eso significa que no hay ningún valor de **x** ni de **y** que verifiquen simultáneamente ambas ecuaciones. Por lo tanto decimos que el sistema planteado no tiene solución.

Si resolvemos gráficamente nos queda la siguiente representación:

Ambas rectas son paralelas. No se cortan en ningún punto.

El conjunto solución de este sistema no contiene ningún par de números. Se simboliza: $S = \varnothing$

El símbolo $\varnothing$ significa conjunto vacío.

Se lee: conjunto solución, vacío.

Problema 6

¿Existirán dos números tales que la suma de ellos sea 50 y el doble de uno de ellos más el doble del otro sea 100?

:| Antes de seguir leyendo trate de resolver el problema con alguno de los métodos que propusimos anteriormente.

:| Ahora compare su resolución con la que proponemos a continuación.

El sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 2y = 100 \end{cases}$$

Despejando **y** de la primera ecuación y reemplazándola en la segunda:

$$y = 50 - x$$

$$2x + 2(50 - x) = 100$$

Aplicando propiedad distributiva para eliminar el paréntesis:

$$2x + 100 - 2x = 100$$

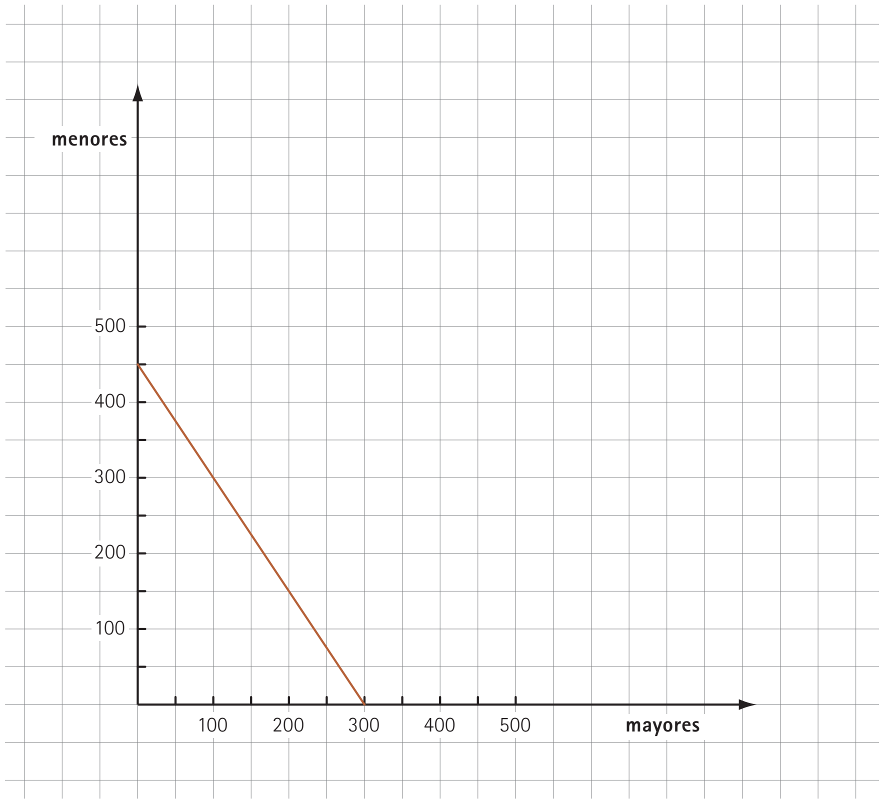
Operando:

$$100 = 100$$

Hemos llegado a una igualdad que es siempre verdadera. Cualquier valor de x e y verifica las dos ecuaciones. Decimos, entonces, que el sistema tiene infinitas soluciones.

Las dos ecuaciones son equivalentes. La segunda se obtiene multiplicando la primera por dos.

Si resolvemos gráficamente nos queda la siguiente representación:



Ambas rectas son coincidentes. Se tocan en todos sus puntos. Los infinitos puntos de esas rectas son las infinitas soluciones del sistema.

El conjunto solución de este sistema esta formado por todos los pares de números reales. Se simboliza $S = R$.

Se lee: conjunto solución, todos los números reales.

SÍNTESIS

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto formado por todos los pares (x; y) que satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones.

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales puede suceder que el conjunto solución esté formado por un único par, por infinitos pares o por ninguno.

Observando los gráficos vemos que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede estar representado por:

- Dos rectas que se cortan en un punto.
- Dos rectas paralelas.
- Dos rectas coincidentes.

El conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede estar formado por:

- Un único par de números, que corresponde a las coordenadas del punto donde las rectas se cortan (Problemas 3 y 4).
- Ningún punto, pues las rectas no se cortan, son paralelas (Problema 5).
- Infinitos puntos, pues las rectas se tocan en todos sus puntos, son coincidentes (Problema 6).

Un sistema de ecuaciones se llama:
Compatible determinado si su conjunto solución está formado por un solo punto.
Incompatible si su conjunto solución es vacío
Compatible indeterminado si su conjunto solución tiene infinitos puntos.

ACTIVIDAD 31

:| Para cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes, hallar su conjunto solución y clasificar el sistema.

:| Previamente analizar las ecuaciones y registrar observaciones. ¿Qué relación existe entre las ecuaciones?

a :| $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 6x + 4y = 16 \end{cases}$

b :| $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$

b :| $\begin{cases} 3x + 4y = 23 \\ 2x + 6y = 22 \end{cases}$

Sistemas con más de dos ecuaciones

Problema 7

Fernando y Claudia quieren invertir sus ahorros en un negocio. Están pensando en poner un almacén. Entre los dos reúnen $15.000 en efectivo. Fernando aportará $3.000 más que Claudia. Como Claudia se hará cargo de pagar los $3.000 en concepto de gastos de alquiler inicial del local, calcula que ahora le queda en efectivo la tercera parte de lo que aporta Fernando.

¿Es correcto el cálculo que hace Claudia? ¿Cuánto dinero aporta cada uno en el negocio?

- Antes de seguir leyendo intente plantear y resolver el problema anterior.
- Ahora compare su resolución con la que proponemos a continuación.

Llamando **x** a la cantidad de dinero que aporta Fernando e **y** a la cantidad de dinero que aporta Claudia, obtenemos el siguiente sistema:

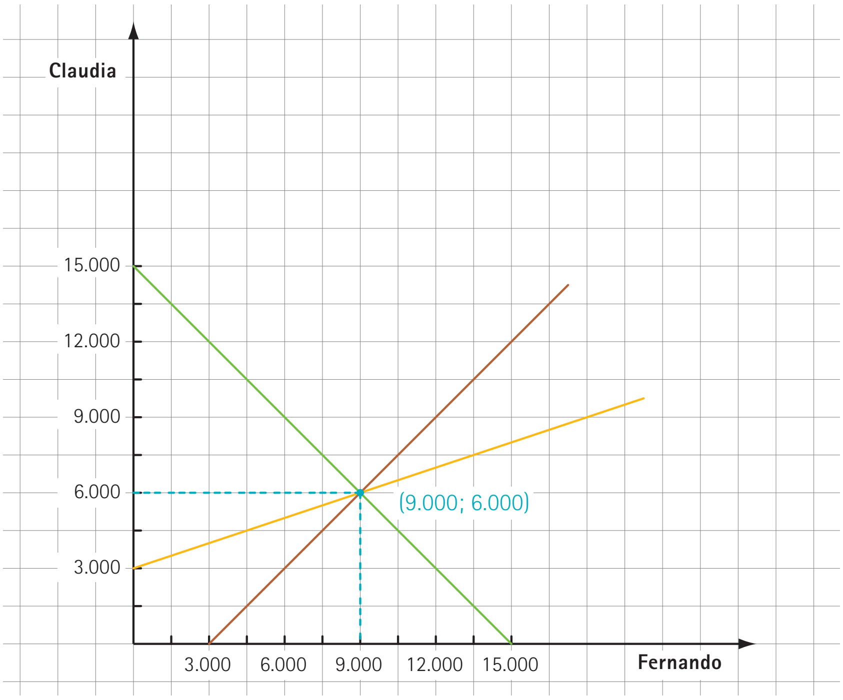
$$\begin{cases} x + y = 15.000 \\ x = y + 3.000 \\ y - 3.000 = x/3 \end{cases}$$

Se trata, en este caso, de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

Al representarlo gráficamente podría suceder que las tres rectas pasaran por un mismo punto. Ese punto será, entonces, la solución del sistema. También podría ocurrir que las tres rectas no compartieran un mismo punto. En ese caso el sistema no tendría solución

Veamos que pasa en nuestro caso:

Para realizar este gráfico primero debemos elegir una escala adecuada. Veamos cómo proceder. En un eje representaremos lo que aporta Claudia y en el otro lo que aporta Fernando. Sabemos que entre los dos tienen 15.000 por lo tanto lo que aportará cada uno será menor que 15.000. Eso indica que en ninguno de los ejes necesitaremos marcar un valor que supere los 15.000. Por otra parte la diferencia entre los aportes de ambos es de 3.000. Esto indica que una buena escala sería considerar 1cm = 3.000.



Se observa que las tres rectas pasan por un mismo punto. Decimos entonces que ese punto es la solución de nuestro sistema de ecuaciones.

También podríamos resolver el problema en forma analítica.

Para ello formamos un sistema considerando dos cualesquiera de las ecuaciones (las que nos resulten más cómodas para trabajar) y hallamos los correspondientes valores de **x** e **y**. Estos valores hallados deben verificar la otra ecuación no considerada. Si esto sucede, los valores hallados constituyen la solución buscada. Si los valores encontrados no verifican la otra ecuación decimos que el sistema no tiene solución.

En nuestro caso elegimos trabajar con las dos primeras ecuaciones y planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 15.000 \\ x = y + 3.000 \end{cases}$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera:

$$y + 3.000 + y = 15.000$$

Resolvemos esta ecuación:

$$2y + 3.000 = 15.000$$
$$2y = 15.000 - 3.000$$
$$2y = 12.000$$
$$y = 12.000/2$$
$$y = 6.000$$

Ahora hallamos el valor de x:

$x = 6.000 + 3000$

$x = 9.000$

Por último debemos ver si estos valores verifican la otra ecuación:

$$y - 3.000 = x/3$$

$$6.000 - 3.000 = 9.000/3$$

$$3.000 = 3.000$$

Podemos asegurar, entonces, que los cálculos de Claudia eran correctos. Para el negocio Fernando aporta \$9.000 y Claudia \$6.000.

Conclusión:
Un sistema con dos incógnitas y tres o más ecuaciones tiene solución si todas las rectas que representan a cada una de las ecuaciones pasan por el mismo punto.

A continuación le proponemos una serie de actividades para que resuelva. Encontrará las respuestas en la clave de corrección que figura al final del Módulo.

En cada una de las actividades:

1 | Identifique las incógnitas involucradas.

2 | Traduzca en ecuaciones las condiciones del problema y plantee un sistema.

3 | Resuelva el sistema gráfica y analíticamente. Justifique la elección que hace del método analítico.

4 | Clasifique el sistema teniendo en cuenta la cantidad de soluciones halladas.

ACTIVIDAD 32

Pedro entrega pizzas a domicilio. Decide guardar todas las monedas de \$0,50 y de \$0,25 que recibe como propina. Cuando junta 100 monedas, las cambia por \$35 en billetes.

:| ¿Cuántas monedas de cada valor juntó Pedro?

ACTIVIDAD 33

:| ¿Se puede cambiar un billete de \$100 en cantidades iguales de billetes de \$2 y \$5?

ACTIVIDAD 34

Una cooperadora debe realizar una compra importante de papel. Pide presupuesto a dos empresas y le envían la siguiente información:

Empresa A : $2,50 el m^2 de papel y $15 en concepto de envío.

Empresa B: $3,25 el m^2 sin gastos de envío.

a :| Si necesitan comprar $10m^2$ de papel, ¿en cuál empresa conviene comprar?

b :| ¿Cuántos m^2 deberían comprar para que resulte indistinto comprarle a cualquiera de las dos empresas?

ACTIVIDAD 35

El doble de la edad de Juan más el cuádruple de la edad de Francisco es 60. Además, si a la edad de Juan se le suma el doble de la edad de Francisco se obtiene 30.

:| ¿Es suficiente esta información para calcular cuántos años tiene cada uno? Justifique su respuesta.

ACTIVIDAD 36

Marcela y Esteban están ahorrando dinero para comprar un regalo de cumpleaños a su madre. Entre los dos ya tienen juntados $200. Marcela tiene $50 más que Esteban. Marcela dice que si Esteban tuviese $20 menos, ya tendría ahorrado la mitad de lo que ella tiene. Pero Esteban dice que eso no es correcto. El tendría que tener $12,50 menos para tener la mitad de lo que tiene su hermana.

:| ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?